Testat 2, Version A (Matr.-Nr. endet auf Ziffer < 5)

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*

Geben Sie die Definition der Konvergenz einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Geben Sie die Definition der Stetigkeit von Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ per Folgenkonvergenz an.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*

Zeigen Sie mit dem ε-δ-Kriterium, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ in $x = 1$ stetig ist.

Aufgabe 4. *(8 Punkte)*

Geben Sie (ohne Beweis) Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und eine Menge A an mit

1) A ist beschränkt, $a_k \in A$ für alle $k \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt in A.
2) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat keinen Häufungspunkt.
3) $\lim_{k\to\infty} c_k = 0$, $c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, aber $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k c_k$ konvergiert nicht.
4) $\frac{d_{k+1}}{d_k} \to 1$ für $k \to \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ konvergiert.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*

Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 2^k$.

Aufgabe 6. *(6 Punkte)*

Zeigen Sie mithilfe der Definition der Exponentialfkt. und $e^{x+y} = e^x e^y \; \forall x, y$ und $e^x > 0 \; \forall x$:

1) $e^x > 1$ für $x > 0$. 2) $e^y > e^x$ für $y > x$.
3) $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ für $a, b > 0$,

wobei $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $e^{\log(c)} = c$ für alle $c > 0$.

Testat 2, Version B (Matr.-Nr. endet auf Ziffer ≥ 5)

Aufgabe 1. *(5 Punkte)*

Geben Sie die Definition der Konvergenz einer reellen Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an.

Aufgabe 2. *(5 Punkte)*

Geben Sie die Definition der Stetigkeit von Funktionen $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit dem ε-δ-Kriterium an.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*

Zeigen Sie mit dem Folgenkriterium, dass die Fkt. $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ in $x = 1$ stetig ist.

Aufgabe 4. *(8 Punkte)*

Geben Sie (ohne Beweis) Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an mit

1) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat unendlich viele Häufungspunkte.
2) $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, aber $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen kein $q \in \mathbb{Q}$.
3) $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.
4) $\frac{d_{k+1}}{d_k} \to 1$ für $k \to \infty$ und $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ konvergiert nicht.

Aufgabe 5. *(4 Punkte)*

Beweisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 3^k$.

Aufgabe 6. *(6 Punkte)*

Zeigen Sie mithilfe der Definition der Exponentialfkt. und $e^{x+y} = e^x e^y \; \forall x, y$ und $e^x > 1 \; \forall x > 0$:

1) $e^x > 0$ für $x \in \mathbb{R}$.   2) $e^y < e^x$ für $y < x$.
3) $\log(b) + \log(a) = \log(ab)$ für $a, b > 0$,

wobei $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert ist durch $e^{\log(c)} = c$ für alle $c > 0$.