Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 7

Abgabe bis Montag, 2. Dezember 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Absolute Konvergenz von Reihen). *(4 Punkte)*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Aussage: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ ist konvergent.

(b) Aussage: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist *absolut* konvergent $\implies \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ ist konvergent.

Aufgabe 2 (Das Wurzelkriterium). *(4 Punkte)*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeigen Sie:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1 \qquad \implies \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent.}$$

Aufgabe 3 (Ein Konvergenzkriterium). *(5 Punkte)*

Seien $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ positive reelle Folgen, für die a_k/b_k gegen eine positive reelle Zahl konvergiert. Zeigen Sie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ist konvergent} \qquad \iff \qquad \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ ist konvergent.}$$

Tipp: Verwenden Sie das Majorantenkriterium.

Aufgabe 4 (Stetigkeit). *(1+1+1=3 Punkte)*

Untersuchen Sie folgende Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit in ihrem Definitionsbereich D.

(a) $D = \mathbb{Q}$ und $f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } x < \sqrt{2} \\ 1\,, & \text{falls } x > \sqrt{2} \end{cases}$

(b) $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}\,, & \text{falls } x > 0 \\ 1\,, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$

(c) $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\,, & \text{falls } x > 0 \\ 0\,, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$

Aufgabe 5 (max und min von stetigen Funktionen). *(2+2=4 Punkte)*

Zeigen $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Zeigen Sie, dass die Funktionen

$$\Phi(x) \coloneqq \max\left(f(x), g(x)\right) \quad \text{und} \quad \Psi(x) \coloneqq \min\left(f(x), g(x)\right)$$

ebenfalls stetig auf D sind.