Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 6

Abgabe bis Montag, 25. November 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1 (Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit). *(2+2=4 Punkte)*

Zeigen Sie:

(i) Die Menge aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist abzählbar.

(ii) Die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist überabzählbar.

Aufgabe 2 (Leibniz-Kriterium). *(5 Punkte)*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen. Beweisen Sie:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0 \implies \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \text{ konvergiert.}$$

Anleitung: Untersuchen Sie für $s_n := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ die beiden Teilfolgen $(s_{2k})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(s_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

Aufgabe 3 (Eine Variation der harmonischen Reihe). *(5 Punkte)*

Wir wissen, dass die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ divergiert. Was geschieht, wenn man die Reihe dahingehend abändert, dass man alle $k \in \mathbb{N}$ auslässt, deren Dezimaldarstellung die Ziffer 7 enthält? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

Tipp: Gruppieren Sie die k nach der Anzahl ihrer Dezimalstellen. Überlegen Sie für eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen, wie viele k es gibt.

Aufgabe 4 (Konvergenzkriterien für Reihen). *(1+1+1+1+2=6 Punkte)*

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k^3 q^k$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k! q^k$ (c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! q^k}$ (jeweils für $0 < q < 1$)

(d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ (*Tipp:* Blatt 5, Aufgabe 1)

(e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+4)}$ (*Tipp:* Partialbruchzerlegung liefert eine Teleskopsumme)

Bestimmen Sie in (e) außerdem den Grenzwert.