Testat 1 Version A

Name: Musterlösung	Vorname: Max
Übungsgruppe: ε	Matrikelnr.: M U S T E R

Lösung zu Aufgabe 1:

$$((A \Rightarrow B) \Rightarrow C)$$

$$\Leftrightarrow (\neg(A \Rightarrow B) \vee C))$$

$$\Leftrightarrow (\neg(\neg A \vee B) \vee C)$$

Weitere Umformung nicht nötig.

Lösung zu Aufgabe 2:

$\underline{n=0}$: $\sum_{k=0}^{0} 2k+1 = 1 = 0^2+2\cdot 0+1$ ✓

$\underline{n \to n+1}$: $\sum_{k=0}^{n+1} (2k+1) \overset{\text{I.V.}}{=} (n^2+2n+1) + (2(n+1)+1)$

$\cancel{= n^2+4n+4} =$

$= (n+1)^2 + 2(n+1) + 1.$ ✓

man kann auch bei $n=1$ anfangen, da die Aussage für $n=0$ gar nicht gezeigt werden muss.

Lösung zu Aufgabe 3:

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, und $a \in \mathbb{R}$.

$$a_k \to a \;:\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon>0\, \exists K\in\mathbb{N}\, \forall k\geq K : |a_k - a| \leq \varepsilon$$

Lösung zu Aufgabe 4: $a_k \to -\infty$, $b_k \to b$

Beh: $a_k + b_k \to -\infty$

Bew: Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt $K \in \mathbb{N}$ mit

- $a_k \leq -n - b - 1$ und
- $b_k \leq b + 1$

für alle $k \geq K$

$\Rightarrow a_k + b_k \leq (-n-b-1) + (b+1) = -n \quad \forall k \geq K$

Lösung zu Aufgabe 5: $A \subset \mathbb{R}$ nichtleer & beschränkt.

Beh: $\exists$ Folge $(x_k)_k$ in A mit $x_k \to \sup A$.

Bew: Zu $k \in \mathbb{N}$ ist $\sup A - \frac{1}{k}$ keine obere Schranke von A $\Rightarrow \exists\, x_k \in A : x_k > \sup A - \frac{1}{k}$

Aber auch $x_k \leq \sup A < \sup A + \frac{1}{k}$

$\Rightarrow |x_k - \sup A| < \frac{1}{k} \to 0 \Rightarrow x_k \to \sup A$

Lösung zu Aufgabe 6: Einfache Beispiele:

1) $a_k = (-1)^k$

2) $b_k = \begin{cases} k, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$

3) $c_k = \sqrt{2}$

Anzahl Zusatzblätter: 0

Testat 1 Version B

Name: Musterlösung	Vorname: Max
Übungsgruppe: δ	Matrikelnr.: M U S T E R

Lösung zu Aufgabe 1:

$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$$

$$\Longleftrightarrow (\neg A \vee (B \Rightarrow C))$$

$$\Longleftrightarrow (\neg A \vee (\neg B \vee C))$$

diese Klammern kann man weglassen, weil „$\vee$" assoziativ ist. Aber ein Ausdruck wie „$A \vee B \wedge C$" ergibt ohne Klammern keinen Sinn!
$\rightarrow (A \vee B) \wedge C$ oder $A \vee (B \wedge C)$??

Lösung zu Aufgabe 2:

~~$\underline{n=0}$~~ : $\longleftarrow$ hier lieber nicht bei $n=0$ starten: Was soll $\sum_{k=1}^{0} \ldots$ überhaupt bedeuten?

$\underline{n=1}$: $\sum_{k=1}^{1}(2k-1) = 2-1 = 1 = 1^2$ ✓

$\underline{n \rightarrow n+1}$: $\sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) \overset{\text{I.V.}}{=} n^2 + (2(n+1)-1)$

$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2. \checkmark$$

Lösung zu Aufgabe 3:

s. Version A.

Lösung zu Aufgabe 4: $a_k \to +\infty$, $(b_k)_k$ beschränkt.

Beh: $a_k + b_k \to +\infty$.

Bew: $\exists B > 0 : |b_k| \leq B \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt $K \in \mathbb{N}$ mit

$a_k \geq n + B \; \forall k \geq K$

$\Rightarrow a_k + b_k \geq a_k - |b_k| \geq n + B - B = n \quad \forall k \geq K$.

Lösung zu Aufgabe 5: Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschr.

Beh: $\exists$ Folge $(x_k)_k$ in A mit $x_k \to +\infty$.

Bew: Zu $k \in \mathbb{N}$ gibt es, da k keine obere Schranke von A ist, ein $x_k \in A$ mit $x_k > k$.

Insbesondere: $x_k \to +\infty$

(Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $K := n$. Für $k \geq K$ gilt $x_k > k \geq K = n$)

Lösung zu Aufgabe 6:

1) $a_k = (-1)^k \frac{1}{k}$

2) ~~$a_k = k$~~ $b_k = k$

3) $c_k = (-1)^k k$

Anzahl Zusatzblätter: 0