Prof. Dr. B. Schweizer
Klaas Poelstra, M. Sc.

Technische Universität Dortmund
Wintersemester 2019/20

Analysis I

Blatt 3

Abgabe bis Montag, 4. November 2019, 14:00 Uhr

Aufgabe 1. *(1+2+2=5 Punkte)*

Sei $0 \leq q \leq 1$ und

$$a_k := 1 + \frac{1}{k^2}\,, \quad b_k := \left(1 - \frac{1}{k}\right) q^k\,, \quad c_k := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } k \neq 10^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } k = 10^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Erraten Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und beweisen Sie die Konvergenz.

Aufgabe 2. *(3+2=5 Punkte)*

Sei $0 \leq q < 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} kq^k = 0$.
Tipp: Schreiben Sie $q^{-1} = 1 + h$ mit $h := q^{-1} - 1 > 0$ und verwenden Sie den binomischen Lehrsatz.

(b) Folgern Sie, dass $\lim_{k\to\infty} k^n q^k = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. *(5 Punkte)*

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$ und $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, sowie $b_0, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, wobei $a_m \neq 0$ und $b_n \neq 0$. Untersuchen Sie die Konvergenz von

$$\frac{a_0 + a_1 k + \cdots + a_m k^m}{b_0 + b_1 k + \cdots + b_n k^n}$$

für $k \to \infty$.

Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $m < n$, $m = n$ und $m > n$. Beweisen und verwenden Sie für den letzten Fall folgende Aussage:

Für eine Nullfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist $\frac{1}{a_k}$ nicht konvergent.

Aufgabe 4. *(3+2=5 Punkte)*

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $b_k \coloneqq \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} a_j$ für $k \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie: Falls $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(b) Geben Sie eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ an, so dass zwar $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ selbst aber nicht.