Analysis I

TU Dortmund, Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. Ben Schweizer

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Über das Wesen der Mathematik, Modelle

Themen der Analysis I, Ziele der Vorlesung

1 Reelle Zahlen

1.1 Logische Grundlagen: Aussagen, Beweise, Mengen

Aussagen, Implikationen, Beweise, Beweistypen, Quantoren, Mengen, Rechnen mit Mengen

Satz: $\sqrt{2}$ ist nicht rational.

Satz: $\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)/2$.

Satz: Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

1.2 Die Zahlenbereiche $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$

Peano Axiome für $\mathbb{N}$, Gruppen, Inverse der Addition, $\mathbb{Z}$, Inverse der Multiplikation, $\mathbb{Q}$, Anordnung, Der Körper F_2, Absolutbetrag

$\mathbb{Z}$ ist eine additive Gruppe, $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.

Zusätzliche Eigenschaften der Anordnung: $w < x$, $y < z \Rightarrow w + y < x + z$ und $0 < w \iff -w < 0$ und $x < y$, $y < z \Rightarrow x < z$ und $x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0$.

Satz: Die Menge $\{\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} | p^2 \leq 2q^2\}$ besitzt kein maximales Element.

1.3 Vollständigkeit und $\mathbb{R}$

Schranken, maximale und minimale Elemente, Suprema und Infima, das Vollständigkeitsaxiom (V), der Körper $\mathbb{R}$, das Archimedische Axiom

(V) Jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge besitzt ein Supremum.

Bem: $\sup A$ ist (falls existent) eindeutig bestimmt.

$\mathbb{R}$ ist ein vollständiger, angeordneter Körper.

Satz: $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

Satz (Archimedisches Axiom): Zu beliebigen reellen Zahlen $x, y > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > y$.

Satz (Bernoulli Ungleichung): Für $x \geq 0$ gilt $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Satz: Zu $b > 1$ und $M > 0$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > M$.

2 Konvergenz

2.1 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Konvergenz von Folgen, Nullfolgen, Formeln für Grenzwerte, Teilfolgen, Bestimmte Divergenz

Def. (Folge): Formal ist eine Folge eine Abbildung $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{N} \ni k \mapsto a_k \in \mathbb{R}$.

Def. (Konvergenz): $a_k \to a :\iff \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} : (|a_k - a| < \varepsilon \; \forall k \geq K)$

Satz: Limiten sind eindeutig. Konvergente Folgen sind beschränkt.

Bem.: Umgekehrte Dreiecksungleichung $|a-b| \geq |a| - |b|$

Satz (Rechenregeln für Folgen): Summen, Produkte und Quotienten von Folgen, Anordnung der Grenzwerte, Einquetschkriterium.

Def. (Teilfolge): $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Teilfolge von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls eine monotone Abbildung $\kappa : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert mit $b_k = a_{\kappa(k)} \; \forall k \in \mathbb{N}$.

Bem.: Für eine konvergente Folge $a_k \to a \in \mathbb{R}$ konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.

Def. (Bestimmte Divergenz): Wir schreiben $a_k \to \infty$ für $k \to \infty$, falls gilt: $\forall C \in \mathbb{R} \exists K \in \mathbb{N} :$ $a_k \geq C \forall k \geq K$.

2.2 Konvergenzkriterien

Monotone Folgen, streng monotone Folgen, Berechnung von Quadratwurzeln, Oberer/Unterer Limes, Cauchy-Folgen

Satz (Monotoniekriterium): Jede Folge, die monoton und beschränkt ist, konvergiert.

Satz (Quadratwurzel): Für $a > 0$ konvergiert die rekursiv definierte Folge $x_{k+1} := (x_k + a/x_k)/2$ mit $x_0 := a+1$ gegen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $x^2 = a$.

Def. ($\limsup$): Für eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ betrachten wir die Mengen $A_n := \{a_j | j \geq n\} \subset \mathbb{R}$. Drei Fälle können auftreten: 1.) A_n ist unbeschränkt für alle $n \in \mathbb{N}$. In diesem Fall setzen wir $\limsup_k a_k := +\infty$. 2.) Die Folge $b_n := \sup A_n$ ist beschränkt. Wir setzen $\limsup_k a_k := \lim_n b_n$ (Limes existiert nach Monotoniekriterium). 3.) Bestimmte Divergenz $b_n \to -\infty$ für $n \to \infty$. Wir setzen $\limsup_k a_k := -\infty$.

Satz (Teilfolgen und $\limsup$): Jede beschränkte Folge $(a_k)_k$ besitzt eine Teilfolge, die gegen $A := \limsup_{k\to\infty} a_k \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Satz: Eine Folge $(a_k)_k$ konvergiert gegen $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $\limsup_k a_k = a = \liminf_k a_k$.

Def. (Cauchy-Folgen): Eine Folge $(a_k)_k$ ist Cauchy-Folge, falls: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \; \forall n,m \geq K$.

Bem.: Jede konvergente Folge ist Cauchy-Folge.

Satz (Cauchy-Kriterium): Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Ausblick: Für metrische Räume (M,d) definiert man: (M,d) ist *vollständig,* wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

2.3 Topologische Grundbegriffe

Offene und abgeschlossene Mengen, Häufungspunkte, der Satz von Bolzano-Weierstraß, Folgenkompaktheit, Abzählbarkeit

Lemma: $a_k \to a \in A$ und A offen. Dann: $\exists K \in \mathbb{N} : a_k \in A\ \forall k \geq K$.

Satz: Für $A \subset \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent: (1) A ist abgeschlossen. (2) für jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A mit $a_k \to a$ in $\mathbb{R}$ gilt: $a \in A$.

Def. (Häufungspunkt): $a \in \mathbb{R}$ ist Häufungspunkt der Folge $(a_k)_k$, falls gilt: $\forall \varepsilon > 0\ \forall K \in \mathbb{N}$ $\exists k \geq K : |a_k - a| < \varepsilon$.

Satz (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$): Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ hat einen Häufungspunkt.

Satz (Variante von B.-W.): Für $A \subset \mathbb{R}$ sind folgende Aussagen äquivalent: (1) A ist abgeschlossen und beschränkt. (2) jede Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in A hat einen Häufungspunkt in A.

Def (Abzählbarkeit): M ist abzählbar, falls es eine surjektive Abbildung $\Phi : \mathbb{N} \to M$ gibt.

Satz: Abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar.

Cor.: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Satz: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

2.4 Reihen

Konvergenz von Reihen, Konvergenzkriterien, alternierende Reihen, absolute Konvergenz, Umordnungen, Produkte von Reihen

Für Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit zwei Bedeutungen: (A) Es bezeichnet die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. (B) Es bezeichnet, falls existent, den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ der Partialsummen.

Bsp.: $\sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1/(1-q)$ für $q \in (0,1)$.

Satz: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Rightarrow$ $(a_k)_k$ ist eine Nullfolge.

Satz (Leibniz Kriterium): Sei $(a_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge mit $a_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Bsp.: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^{-1}$ konvergiert.

Def.: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent,* falls $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Bem.: Absolut konvergente Reihen sind konvergent.

Satz (Majorantenkriterium): Sei $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ konvergent mit $c_k \geq 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. Für die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gelte $|a_k| \leq c_k\ \forall k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Beispiel: Für $\mathbb{N} \ni m \geq 2$ konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-m}$.

Satz (Quotientenkriterium): Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_k \neq 0 \forall k \geq k_0$ für ein $k_0 \in \mathbb{N}$. Für eine Zahl $\Theta \in (0,1)$ gelte $|a_{k+1}/a_k| \leq \Theta\ \forall k \geq k_0$. Dann ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

Satz (Kleiner Umordnungssatz): Sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe mit Wert $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. Dann gilt für jede bijektive Abbildung $\Phi : \mathbb{N}_{>0} \to \mathbb{N}_{>0}$ und die dadurch definierte Umordnung $b_k = a_{\Phi(k)}$, dass $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = s$.

Def. (beliebige Indexmengen): M sei eine beliebige abzählbar unendliche Indexmenge, $a_i \in \mathbb{R}$ für $i \in M$. Dann heißt $\sum_{i\in M} a_i$ absolut konvergent, falls für ein $C_0 \in \mathbb{R}$ gilt: $\sum_{i\in E} |a_i| \leq C_0$ für jede endliche Indexmenge $E \subset M$. Für eine bijektive Abbildung $\Phi : \mathbb{N} \to M$ setzen wir

$$\sum_{i\in M} a_i := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{\Phi(k)}\,.$$

Satz (Großer Umordnungssatz): Sei $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} I_i$ eine Indexmenge, die als disjunkte Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Indexmengen geschrieben werden kann, und $\sum_{\alpha\in M} a_\alpha$ absolut konvergent. Dann gilt

$$\sum_{i\in M} a_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in I_i} a_\alpha\,.$$

Bsp. (Erwartungswert der geometrischen Verteilung): Für $q \in (0,1)$ gilt $\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = 1/(1-q)^2$.

Satz (Produkt von Reihen): Falls $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k$ und $\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k$, beide mit absoluter Konvergenz, so gilt

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\right) \cdot \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\right) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} a_i b_j$$

mit absoluter Konvergenz auf der rechten Seite.

Def (Exponentialfunktion): Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$e^x := \exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k\,.$$

Satz: Die Exponentialreihe konvergiert absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$. Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}\,.$$

3 Stetigkeit

3.1 Stetige Funktionen

Funktionen, Stetigkeit, Operationen mit Funktionen, Verkettung, Kriterien für Stetigkeit, Stetigkeit der Exponentialfunktion

Def (Stetigkeit): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Für $a \in D$ heißt f *stetig in a,* falls für jede Folge $x_k \to a$ für $k \to \infty$, $x_k \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $f(x_k) \to f(a)$. Die Funktion f heißt f *stetig,* falls sie in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Satz: Für $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig sind auch $f+g$, $f \cdot g$ und, auf seinem Definitionsbereich $\tilde{D} := \{x \in D | g(x) \neq 0\}$, die Funktion $\frac{f}{g}$ stetig.

Satz (ε-δ Definition): Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ stetig in } a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \forall x \in D, |x-a| < \delta$$

Satz: Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig.

3.2 Sätze über stetige Funktionen

Zwischenwertsatz, Annahme der Extrema, gleichmäßige Stetigkeit, Approximation durch Treppenfunktionen, der Raum $C^0([a,b])$, gleichmässige Konvergenz

Satz (Zwischenwertsatz): Sei $D = [a,b]$, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig, $y \in \mathbb{R}$. Es gelte $f(a) < y < f(b)$. Dann existiert $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = y$.

Satz und **Def**. (Logarithmus): Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to (0,\infty)$ besitzt eine Umkehrfunktion. Diese bezeichnen wir mit log. Also: Für $\log : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gilt $\exp \circ \log = \mathrm{id}_{(0,\infty)}$ und $\log \circ \exp = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

Satz (Maximum stetiger Funktionen): Sei $D = [a,b]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und es gibt $x_0 \in D$ mit $f(x_0) = \sup\{f(x) | x \in D\} \in \mathbb{R}$.

Def. (gleichmäßige Stetigkeit): Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig,* falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall x, y \text{ mit } |x-y| < \delta .$$

Satz: Sei $D = [a,b]$ und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$, so dass $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ und $|\psi(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in [a,b]$.

Def. (gleichmäßige Konvergenz): Eine Funktionenfolge $(f_k)_k$ konvergiert gleichmäßig gegen $g : D \to \mathbb{R}$, falls gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K \in \mathbb{N} \; \forall k \geq K : \qquad |f_k(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in D .$$

Satz: Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f_k)_k$ konvergiere gleichmäßig gegen g. Dann ist auch g stetig.

3.3 Wichtige reelle Funktionen

Umkehrfunktionen, Logarithmus, Allgemeine Potenzen, Sinus und Cosinus, die Zahl π

Satz (Umkehrfunktion): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig. Mit $A := f(a)$ und $B := f(b)$ gibt es eine Umkehrfunktion $g = f^{-1} : [A,B] \to [a,b]$, es gilt also $g \circ f = \mathrm{id}$. Die Funktion g ist stetig und streng monoton wachsend.

Def.: $a^x := \exp_a(x) := \exp(x \log(a))$.

Satz: Der Ausdruck a^x stimmt mit früheren Definitionen überein: für $x = n \in \mathbb{N}$ ist a^x das n-fache Produkt von a's, f'ür $x = -y$ gilt $a^{-y} = 1/a^x$, für $x = 1/n$ ist a^x die n-te Wurzel von a, für $a = e$ gilt $a^x = e^x$. Rechenregeln: $a^{x+y} = a^x a^y$ und $(a^x)^y = a^{xy}$.

Def.: Für $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ und $c \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ schreiben wir $f(x) \to c$ für $x \to a$ falls zwei Bedingungen erfüllt sind: (1) es gibt mindestens eine Folge $x_k \to a$ mit $x_k \in D$ für alle $k \in \mathbb{N}$. (2) Für jede solche Folge gilt $f(x_k) \to c$.

Def.: Sinus und Cosinus werden für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch die absolut konvergenten Reihen

$$\sin(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \qquad \cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Als gleichmäßige Limiten stetiger Funktionen sind sin und cos stetig.

Def.: Sei x_0 die erste positive Nullstelle von cos. Wir setzen $\pi := 2x_0$.

Satz: Additionstheoreme für sin und cos und Folgerungen.

4 Differentiation

4.1 Differenzierbare Funktionen

Differenzierbarkeit, Produktregel, Quotientenregel, Ableitung der Umkehrfunktion, Kettenregel

Def.: Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in D$ ein Punkt. f heißt differenzierbar in $\bar{x}$, falls für ein $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\substack{x \to \bar{x} \\ \bar{x} \neq x \in D}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} = c.$$

In diesem Fall: $f'(\bar{x}) = c$, die Zahl c ist die Ableitung von f in $\bar{x}$.

Satz: Für differenzierbare Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ gelten: Summenregel $(f+g)' = f' + g'$, Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ und, in Punkten mit $g \neq 0$, Quotientenregel $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$.

Satz (Ableitung der Umkehrfunktion): Sei $f : D \to \mathbb{R}$ streng monoton mit Umkehrfunktion φ. In Punkten $y = f(x)$ mit $f'(x) \neq 0$ ist φ differenzierbar mit $\varphi'(y) = 1/f'(\varphi(y))$.

Satz (Kettenregel): Seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f(D) \subset E$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar und es gilt $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x)$.

4.2 Geometrische Anwendungen

Ableitung in lokalen Extrema, Mittelwertsatz, Monotone Funktionen, höhere Ableitungen, hinreichendes Kriterium für Maxima, Konvexität

Def. (lokales Maximum): f hat in x ein lokales Maximum, falls für ein $\delta > 0$ gilt: $f(y) \leq f(x)\ \forall y \in (x-\delta, x+\delta)$.

Satz (notwendige Bedingung): Sei $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}$, x sei ein lokales Maximum. Dann gilt $f'(x) = 0$.

Satz (Mittelwertsatz I): Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f differenzierbar auf (a,b). Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Korollare: 1.) $f' \equiv 0 \Rightarrow f$ ist konstant. 2.) $f' \geq 0 \Rightarrow f$ ist monoton wachsend.

Satz (hinreichende Bedingung): Sei $f : D \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}$. In $x \in D$ gelte $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$. Dann hat f in x ein lokales Maximum.

Def. (Konvexität): Sei D ein Intervall. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt konvex, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und f zweimal differenzierbar auf (a,b) mit $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Dann ist f konvex.

4.3 Taylor-Reihen

Approximation mehrfach differenzierbarer Funktionen, Definition der Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt x_0, Konvergenzradius einer Reihe

Satz (Charakterisierung der Ableitung): Sei $D \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$f \text{ ist diff'bar in } x_0 \iff \begin{cases} \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = f(x_0) + c\,(x-x_0) + \varphi(x) \\ \text{mit } \dfrac{\varphi(x)}{x-x_0} \to 0 \text{ für } x_0 \neq x \to x_0 \end{cases}$$

In diesem Fall gilt $f'(x_0) = c$.

Satz (Einfache Regel von l'Hospital): Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $D \subset \mathbb{R}$ offen, $x_0 \in D$. Es gelte $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g(x) \neq 0$ für $x \neq x_0$ und $g'(x_0) \neq 0$. Dann gilt, für $x_0 \neq x \to x_0$,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Def. (Taylor-Reihe): Sei $f : D \to \mathbb{R}$ beliebig oft diff'bar auf dem offenen Intervall D, $x_0 \in D$ ein Punkt. Dann heißt die Reihe

$$T^f_{x_0}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,(x - x_0)^k \quad \text{mit} \quad a_k := \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)$$

die Taylor-Reihe von f im Entwicklungspunkt x_0.

Warnungen: 1.) Für $x \neq x_0$ muss $T^f_{x_0}(x)$ nicht konvergieren. 2.) Falls für $x \neq x_0$ die Reihe $T^f_{x_0}(x)$ konvergiert, so muss *nicht* $T^f_{x_0}(x) = f(x)$ gelten.

Satz (Konvergenzradius): Sei $(a_0, a_1, \ldots)$ eine Folge von Koeffizienten, $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Punkt und $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \,(x - x_0)^k$ die zugehörige Potenzreihe. Dann existiert ein *Konvergenzradius* $r \in [0, \infty) \cup \{+\infty\}$ mit den Eigenschaften:

1. Die Potenzreihe ist *absolut konvergent* für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < r$

2. Die Potenzreihe ist *divergent* für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| > r$

Für alle $r_0 < r$ gilt: Die Reihe konvergiert gleichmäßig auf $[x_0 - r_0, x_0 + r_0]$.

5 Integration

5.1 Das Riemannsche Integral

Integral für Treppenfunktionen, Oberintegral und Unterintegral, Riemann Integral als lineares monotones Funktional, Mittelwertsatz, Riemannsche Summen

Def. (Integral für Treppenfunktionen): Für eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit Sprungstellen $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und Werten $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$\int_a^b \varphi := \sum_{j=1}^{n} c_j \,(x_j - x_{j-1})$$

Satz: Der Raum $T[a, b]$ der Treppenfunktionen ist ein Vektorraum und $\int : T[a, b] \to \mathbb{R}$ ist ein lineares, monotones Funktional.

Def. (Ober- und Unterintegral): Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann setzen wir

$$\int^* f := \int_a^{b,*} f := \inf\left\{ \int_a^b \varphi \,\middle|\, \varphi \in T[a, b], \varphi \geq f \right\},$$
$$\int_* f := \int_{a,*}^{b} f := \sup\left\{ \int_a^b \psi \,\middle|\, \psi \in T[a, b], \psi \leq f \right\}.$$

Satz: Das Oberintegral ist subadditiv und positiv 1-homogen: $\int^* (f + g) \leq \int^* f + \int^* g$ und $\int^* \lambda f = \lambda \int^* f$ für $\lambda \geq 0$.

Def. (Riemann-Integral): Eine Funktion heißt Riemann-integrierbar (R-intbar), falls Ober- und Unterintegral übereinstimmen. In diesem Fall setzen wir

$$\int f := \int^* f = \int_* f\,.$$

Satz: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar genau dann, wenn gilt: $\forall\varepsilon>0\ \exists\psi\le f\le\varphi,\ \psi,\varphi\in T[a,b]$: $\int\varphi\le\int\psi+\varepsilon$.

Satz: Jede stetige Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar.

Satz: Jede monotone Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist R-intbar.

Satz: Der Raum $R[a,b]:=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}|f \text{ ist R-intbar}\}$ ist ein Vektorraum und $\int:R[a,b]\to\mathbb{R}$ ist ein lineares und monotones Funktional.

Satz: Seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-intbar. Dann sind auch die Funktionen f_+, $|f|$, $f\cdot g$ und $|f|^p$ für $p\in[1,\infty)$ R-intbar.

Satz (Mittelwertsatz II): Seien $f,\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, $\varphi\ge0$. Dann existiert ein Punkt $\xi\in[a,b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b\varphi(x)\,dx\,.$$

Insbesondere ($\varphi\equiv1$): Es existiert ein Punkt $\xi\in[a,b]$ mit $\int_a^b f=f(\xi)(b-a)$.

Satz (Riemann'sche Summen): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-intbar und $\varepsilon>0$. Dann existiert $\delta>0$, so dass für jede Unterteilung $a=x_0<\ldots<x_m=b$ mit $x_j-x_{j-1}<\delta\ \forall j\le m$ und jede Wahl von Stützstellen $\xi_j\in[x_{j-1},x_j]$ gilt

$$\left|\int_a^b f-\sum_{j=1}^m f(\xi_j)\,(x_j-x_{j-1})\right|<\varepsilon\,.$$

5.2 Integration und Differentiation

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, Stammfunktionen, Berechnung von Integralen, Substitutionsregel, Partielle Integration

Hier immer: $I\subset\mathbb{R}$ ein beliebiges Intervall mit $a\in I$ und $I\ne\{a\}$.

Satz (Hauptsatz, 1. Version): Sei $f:I\to\mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten

$$F:I\to\mathbb{R},\quad x\mapsto F(x):=\int_a^x f$$

Dann ist F differenzierbar in I und es gilt $F'=f$.

Def.: Zu $f:I\to\mathbb{R}$ heißt $F:I\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f, falls F differenzierbar ist mit $F'=f$.

Satz (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung): Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f. Dann gilt für Punkte $a, b \in I$

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \quad =: F\Big|_a^b .$$

Satz (Substitutionsregel): Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a,b] \to I$ stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\, dx .$$

Satz (Partielle Integration): Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_a^b fg' = -\int_a^b f'g + (fg)\Big|_a^b .$$

Satz: Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar. Für $k \in \mathbb{R}$ setze $F(k) := \int_a^b f(x) \sin(kx)\, dx$. Dann gilt $F(k) \to 0$ für $k \to \infty$.

5.3 Uneigentliche Integrale

***Def**inition uneigentlicher Integrale, Gamma-Funktion*

Def. (Uneigentliches Integral): Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $a < b$. Falls f über jedes Teilintervall $[\alpha, \beta] \subset (a,b)$ integrierbar ist und für ein $c \in (a,b)$ die Grenzwerte

$$\int_a^c f := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f \quad \text{und} \quad \int_c^b f := \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f$$

existieren, so nennen wir f *uneigentlich integrierbar* über (a,b) und setzen

$$\int_a^b f := \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f + \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f .$$

Def. und **Satz** (Gamma-Funktion): Für $x > 0$ setzen wir $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Dann ist Γ wohldefiniert (als uneigentliches Integral) und es gilt $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz (Integral-Vergleichskriterium für Reihen): Sei $f : [1, \infty) \to [0, \infty)$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) \quad \text{konvergiert} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_1^\infty f(x)\, dx \quad \text{existiert.}$$

6 Approximation von Funktionen

6.1 Taylor-Reihen und Restglieddarstellungen

Restgliedabschätzungen für Taylor-Reihen

Satz (Taylor'sche Formel): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig diffbar. Dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k \; + R_{n+1}(x)$$

mit dem Restglied

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x-t)^n\, f^{(n+1)}(t)\, dt\,.$$

Satz (Lagrange Restglied): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ sei $(n+1)$-mal stetig diffbar. Dann gibt es zwischen x_0 und x einen Punkt ξ, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\,(x-x_0)^k \; + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,(x-x_0)^{n+1}\,.$$

6.2 Fourier-Reihen

Fourier-Koeffizienten und Fourier-Reihen, L^2-Skalarprodukt, Besselsche Ungleichung und Vollständigkeitsrelation

Def. (Fourier-Koeffizienten): Zu $f \in R[0,2\pi]$ heißen

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad (\text{für } n > 0) \qquad \text{und } a_0 := \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx \quad (n > 0)$$

die *Fourier-Koeffizienten* von f. Die Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

heißt die Fourier-Reihe von f.

Notation: Für eine abstrakte Beschreibung verwenden wir $V := R[0,2\pi]$, darauf das Skalarprodukt $\langle f, g\rangle := \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$, $\|f\|_2^2 := \langle f, f\rangle$ und das orthogonale System $e_k \in V$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben durch $e_k(x) := \cos(kx)$ für $k > 0$, $e_0(x) = 1/\sqrt{2}$, und $e_k(x) := \sin(-kx)$ für $k < 0$.

Satz (Bessel): Sei $f \in V$ mit Fourier-Koeffizienten $a_k := \langle f, e_k\rangle$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k \right\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2\,.$$

Cor. 1 (Bessel'sche Ungleichung): Für $f \in V$ mit Fourier-Koeffizienten a_k gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \leq \|f\|_2^2 .$$

Def.: Eine Funktionenfolge $f_n \in R[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert im quadratischen Mittel gegen $f \in R[a,b]$, falls $\|f - f_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$.

Cor. 2 (Vollständigkeitsrelation): Für $f \in V$ mit Fourier-Koeffizienten a_k sind äquivalent:
(i) Es gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \|f\|_2^2 .$$

(ii) Die Fourier-Reihe von f konvergiert im quadratischen Mittel.

Satz: Sei $f \in T[0,2\pi]$, also eine Treppenfunktion. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f.

Satz: Sei $f \in R[0,2\pi]$, also Riemann-integrierbar. Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f im quadratischen Mittel gegen f.