Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Anmerkung: Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind Bonusaufgaben und gehören entsprechend nicht mehr zum Pflichtteil. Die Lösungen werden nicht besprochen.

Aufgabe 53) (Anwendungen der Sylvester-Gleichung) (4 Bonuspunkte)

Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ mit $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$, und sei $C \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$.

- (a) Zeigen Sie, dass die Blockmatrizen $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ als Operatoren aus $\mathcal{L}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{K})$ ähnlich zueinander sind.

Tipp: Man lasse sich von Aufgabe 8 (a) inspirieren.

- (b) Sei speziell $\mathcal{H} = \mathcal{K}$. Zeigen Sie: Kommutiert C mit $A + B$ und AB , so kommutiert C auch mit A und B .

Aufgabe 54) (Die Lyapunov-Gleichung) (4 Bonuspunkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal mit $\operatorname{Re} \lambda < 0$ für alle $\lambda \in \sigma(A)$.

Zeigen Sie: Die sogenannte *Lyapunov-Gleichung* $AX + XA^* = -I$ hat eine eindeutige Lösung $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, und diese stellt einen positiven Operator dar (d.h. X ist hermitesch mit $\lambda > 0$ für alle $\lambda \in \sigma(X)$).

Aufgabe 55) (Die Sylvester-Gleichung für unitäre Oper.) (4 Bonuspunkte)

Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{K})$ unitär mit $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Sei ferner $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| < \infty$ und

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ik\theta} = \frac{1}{1 - e^{i\theta}}$$

für alle $\theta \in (-\pi, \pi]$ mit $e^{i\theta} \in (\sigma(A))^{-1} \cdot \sigma(B) := \{\mu/\lambda : \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}$.

Zeigen Sie: Für alle $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ ist die Lösung X der Sylvester-Gleichung $AX - XB = Y$ gegeben durch

$$X = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k A^{-k-1} Y B^k.$$

Aufgabe 56) (Normabschätzungen für Lösungen der Sylvester-Gleichung)
(4 Bonuspunkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal mit $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. Seien ferner $X, Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $AX - XB = Y$.

- (a) Es gebe $\rho, \delta > 0$ mit $\sigma(B) \subset B_\rho(0)$ und $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus B_{\rho+\delta}(0)$. Folgern Sie aus der Identität $X = A^{-1}(Y + XB)$ die Normabschätzung

$$\| \|X\| \| \leq \frac{1}{\delta} \| \|Y\| \|$$

für alle unitär invarianten Normen $\| \cdot \|$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

- (b) Seien $K_A, K_B \subset \mathbb{C}$ konvex mit $\sigma(A) \subset K_A$, $\sigma(B) \subset K_B$ und $\text{dist}(K_A, K_B) \geq \delta$ für ein $\delta > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\|X\| \leq \frac{1}{\delta} \|Y\|.$$

Tipp: Man wähle normierte Links- und Rechtssingulärvektoren u bzw. v von X zum Singulärwert $s_1(X) = \|X\|$ und betrachte $\langle u, Yv \rangle$.