Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 49) (Sanfte Majorisierung und der Satz von Lidskii) (4 Punkte)

(a) Seien $x = (x_1, \dots, x_n)^T, y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie:

- i) Falls $x \prec y$, so $x \prec_s y$ und $\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n y_j$;
- ii) Falls $x \prec_s y$ und $\sum_{j=1}^n x_j = \sum_{j=1}^n y_j \neq 0$, so $x \prec y$.

(b) Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal mit $A - B$ normal, τ eine (schwach) unitär invariante Norm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, und $Q: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathcal{H}$ unitär.

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lidskii für normale Operatoren (Satz 5.35 der Vorlesung), dass es eine Permutationsmatrix P gibt mit

$$\tau(A - B) \leq \tau(Q(\text{Eig}(A) - P \text{Eig}(B)P^{-1})Q^*).$$

Anmerkung: Die folgenden Aufgaben beziehen sich Teilweise auf Vorlesungsstoff, der erst in der kommenden Vorlesung am Mittwoch, den 26. Juni, diskutiert wird.

Aufgabe 50) (Die Hauptwinkel zwischen Unterräumen) (4 Punkte)

Seien $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ Unterräume von $\mathcal{H}$ mit $\dim \mathcal{M} \geq \dim \mathcal{N} =: q \geq 1$. Wir definieren nun rekursiv die sogenannten *Hauptwinkel* $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_q \leq \pi/2$ zwischen $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ durch

$$\cos \theta_k = \max_{\substack{u \in \mathcal{M} \setminus \{0\} \\ u \perp \{u_1, \dots, u_{k-1}\}}} \max_{\substack{v \in \mathcal{N} \setminus \{0\} \\ v \perp \{v_1, \dots, v_{k-1}\}}} \frac{|\langle u, v \rangle|}{\|u\| \|v\|} = \frac{|\langle u_k, v_k \rangle|}{\|u_k\| \|v_k\|}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für die orthogonalen Projektionen $P_{\mathcal{M}}$ und $P_{\mathcal{N}}$ auf $\mathcal{M}$ bzw. $\mathcal{N}$ gilt

$$\cos \theta_k = s_k(P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}) \quad \text{und} \quad \sin \theta_k = s_{q-k+1}(P_{\mathcal{M}}^{\perp}P_{\mathcal{N}})$$

für $1 \leq k \leq q$.

Tipp: Singulärwertzerlegung für $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}$.

(b) Falls speziell $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N} = q \leq n - q$, so sind die Singulärwerte der Differenz $P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}}$ gegeben durch

$$s(P_{\mathcal{M}} - P_{\mathcal{N}}) = (\sin \theta_q, \sin \theta_q, \sin \theta_{q-1}, \sin \theta_{q-1}, \dots, \sin \theta_1, \sin \theta_1, 0, \dots, 0)^T.$$

Bemerkung: Insbesondere sind die Eigenwerte des Winkeloperators $\Theta = \Theta(P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}})$ dann also

$$\lambda(\Theta) = (\theta_q, \theta_q, \theta_{q-1}, \theta_{q-1}, \dots, \theta_1, \theta_1, 0, \dots, 0)^T.$$

bitte wenden

Aufgabe 51) (Differenzen von orthogonalen Projektionen) (4 Punkte)

Seien $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zwei orthogonale Projektionen.

- (a) Zeigen Sie, dass $\|P - Q\| = \max\{\|PQ^\perp\|, \|P^\perp Q\|\}$.
- (b) Zeigen Sie: Falls $\|P - Q\| < 1$, so $\|PQ^\perp\| = \|P^\perp Q\| < 1$.
Tipp: Aufgabe 50.
- (c) Finden Sie ein Beispiel für orthogonale Projektionen P und Q mit $\|PQ^\perp\| \neq \|P^\perp Q\|$.

Aufgabe 52) (Die direkte Rotation; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Seien $P, Q \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zwei orthogonale Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$. Wir definieren $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ durch

$$U := C^{-1/2} \cdot (QP + Q^\perp P^\perp),$$

wobei $C := C(P, Q) = PQP + P^\perp Q^\perp P^\perp$.

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $C(P, Q) = C(Q, P)$, und C kommutiert sowohl mit P als auch mit Q .
- (b) U ist unitär mit $U^*QU = P$.
- (c) $\operatorname{Re} U = C^{1/2} = \cos \Theta$.
- (d) $U^2 = (Q - Q^\perp)(P - P^\perp)$.

Bemerkung: Man nennt U die *direkte Rotation* von Bild P nach Bild Q . Sie besitzt die folgende Extremaleigenschaft: Es gilt $\|I - U\| \leq \|I - W\|$ für alle unitären $W \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $W^*QW = P$.