technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. Albrecht Seelmann | Dr. Michela Egidi

12. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 45) (Retraktionen und Schatten p-Normen) (4 Punkte)

(a) Verifizieren Sie (ohne Verwendung von Teil (b)), dass die Schatten p-Normen $\|\cdot\|_p$ für $1 \leq p < 2$ nicht die Darstellung $\|\cdot\|_p = |||\cdot|||^{(2)}$ mit einer unitär invarianten Norm $|||\cdot|||$ besitzen.

(b) Finden Sie $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ und eine Retraktion $F\colon \mathbb{C} \to \sigma(A)$ mit $\|F - F(B)\|_p > \|B - A\|_p$ für $1 \leq p < 2$.

Aufgabe 46) (Spektralvariation für quadratische unitär invariante Normen) (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal, $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{N}(\mathcal{H})$ eine (rektifizierbare) normale Kurve mit Endpunkten A und B, und $|||\cdot|||$ eine unitär invariante Norm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Zeigen Sie mit Hilfe von Folgerung 5.27 (und ohne Verwendung von Satz 5.30) der Vorlesung:

$$d_\tau([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq l_\tau(\gamma),$$

wobei $\tau = |||\cdot|||^{(2)}$.

Aufgabe 47) (Eine Bogenlänge bzgl. unitär inv. Normen) (4 Punkte)

Sei $K \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schief-hermitesch, und sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\gamma(t) = \exp(tK)$. Zeigen Sie mit Hilfe von Ky Fan's Maximumprinzip für Singulärwerte (Aufgabe 22) und ohne Verwendung von Aufgabe 48, dass

$$|||\gamma(b) - \gamma(a)||| \leq (b - a)|||K|||$$

für alle unitär invarianten Normen $|||\cdot|||$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt. Folgern Sie hieraus die Ungleichung

$$l_{|||\cdot|||}(\gamma) \leq (b - a)|||K|||.$$

Aufgabe 48) (Bogenlänge für unitär invariante Normen; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Sei $\gamma\colon [a, b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ (stückweise) stetig differenzierbar, und sei $|||\cdot|||$ eine unitär invariante Norm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.
Zeigen Sie, dass

$$|||\gamma(b) - \gamma(a)||| \leq \int_a^b |||\gamma'(t)|||\,\mathrm{d}t.$$

Sie dürfen hierfür ohne Beweis verwenden, dass $|||\cdot|||'' = |||\cdot|||$ gilt, wobei $|||\cdot|||'' := (|||\cdot|||')'$ (vgl. Definition vor Satz 4.18 der Vorlesung).

Bemerkung: Die Aussage gilt analog für beliebige Normen ν auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Dafür muss lediglich unsere Definition der dualen Norm entsprechend auf beliebige Normen erweitert werden.

Abgabe bis Mittwoch, den 26. Juni 2019, um 14 Uhr in den Übungskasten.