9. Übungsblatt zur Gruppentheorie in der Physik

Ute Löw

Abgabe am Mittwoch, den 19.06.2019 bis 12:00 Uhr Sommersemester 2019

Aufgabe 1: Die SU(3) (20 Punkte)

Die SU(3) wird beschrieben durch acht Generatoren t_i, welche hermitesch und spurlos sind ($t_i = \frac{\lambda_i}{2}$, in der fundamentalen Darstellung sind die λ_i die Gell-Mann-Matrizen) und die Lie-Algebra

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c \tag{1}$$

erfüllen. Die Strukturkonstanten sind gegeben durch

$$f_{123} = 1, f_{246} = f_{147} = f_{257} = f_{345} = -f_{156} = -f_{367} = \frac{1}{2}, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{2}$$

Die SU(3) enthält drei SU(2) Subalgebren

1) t_1, t_2, t_3
2) t_4, t_5, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}t_8 + t_3\right)$
3) t_6, t_7, $\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}t_8 - t_3\right)$

Zu jeder Subalgebra lassen sich Auf- und Absteigeoperatoren definieren

$$e^1_\pm = t_1 \pm \mathrm{i}t_2\,, \qquad e^2_\pm = t_6 \pm \mathrm{i}t_7,\,, \qquad e^3_\pm = t_4 \pm \mathrm{i}t_5\,. \tag{3}$$

Im folgenden seien H_1, H_2 und $E^m_\pm$ irreduzible Darstellungen der Generatoren t_3 und t_8, sowie der Auf- und Absteigeoperatoren. Da H_1 und H_2 kommutieren, haben sie eine gemeinsame Eigenbasis. Für einen Eigenzustand $|\Phi\rangle$ gilt hierbei

$$H_1 |\Phi\rangle = p |\Phi\rangle \ , \tag{4}$$
$$H_2 |\Phi\rangle = q |\Phi\rangle \ . \tag{5}$$

Die Wertepaare (p,q) werden in einem sogenannten Gewichtsdiagramm als Punkte im $\mathbb{R}^2$ dargestellt. Das Wertepaar nennt man dabei Gewicht.
Da die gesuchten Darstellungen reduzibel und somit endlich sein sollen, muss es einen Zustand $|\Psi\rangle$ geben, für den gilt

$$E^m_+ |\Psi\rangle = 0 \ . \tag{6}$$

Dieser Zustand wird Zustand des größten Gewichts genannt und hat die Multiplizität eins.

a) Berechnen Sie die Vertauschungsrelationen

   1) $\left[H_{1/2}, E_{\pm}^{m}\right]$

   2) $\left[E_{\pm}^{m}, E_{\pm}^{n}\right]$

   3) $\left[E_{+}^{m}, E_{-}^{n}\right]$

   4) $\left[E_{+}^{m}, E_{-}^{m}\right]$

b) Zeigen Sie, wie das Anwenden der Leiteroperatoren auf den Eigenzustand $|\Phi\rangle$ die Eigenwerte von H_1 und H_2 verändern.

c) Aus welcher geometrischen Form besteht das Gitter, auf welchem die Gewichte im Gewichtsdiagramm liegen. Fertigen Sie eine Skizze eines Gewichtsdiagramms an und zeichnen Sie hier die Auswirkung der Auf- und Absteigeoperatoren ein. Begründen Sie, warum die Gewichtsdiagramme nur dreieckige und hexagonale Formen haben können (Welche Symmetrien gelten in dem Gewichtsdiagramm?).

In einem hexagonalem Gewichtsdiagramm habe die obere horizontale Kante M eine Länge von m und somit $m+1$ verschiedene Gewichte. Die Kante N, die am rechten Ende von M beginnt und diagonal nach unten rechts verläuft, habe eine Länge von n und somit $n+1$ verschiedene Gewichte. Im Spezialfall $m = 0$ oder $n = 0$ ergeben sich die dreieckigen Gewichtsdiagramme. Dem Zustand des größten Gewichts lassen sich mit diesen Definition die Koordinaten $(m/2, (m+2n)/(2\sqrt{3}))$ zuordnen. Alle wichtigen Größen der SU(3) lassen sich durch die beiden natürlichen Zahlen m und n beschreiben (Analog zu j in der SU(2)).

d) Welche Ausrichtung können die dreieckigen Gewichtsdiagramme haben? Wo liegt $|\Psi\rangle$ in diesen Fällen? Bestimmen Sie die Multiplizität der Zustände in dreieckigen Gewichtsdiagrammen. Bestimmen Sie dazu alle linear unabhängigen Zustände eines Gewichts, die sich durch Anwenden der Absteigeoperatoren auf $|\Psi\rangle$ ergeben.

e) Bestimmen Sie die Multiplizität der Zustände in hexagonalen Gewichtsdiagrammen. Bestimmen Sie dazu alle linear unabhängigen Zustände eines Gewichts, die sich durch Anwenden der Absteigeoperatoren auf $|\Psi\rangle$ ergeben.

f) Finden Sie einen Ausdruck für die Dimension der Darstellungen in Abhängigkeit von m und n.

g) Finden Sie einen Ausdruck für den Eigenwert des quadratischen Casimir-Operators und für den Dynkin-Index in Abhängigkeit von m und n.