technische universität dortmund — fakultät für mathematik

Dr. Albrecht Seelmann

Dr. Michela Egidi

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 41) (Die Bogenlänge) (4 Punkte)

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Zeigen Sie:

(a) Die Bogenlänge ist additiv, d.h. für alle $r \in [a,b]$ gilt

$$l_{\|\cdot\|}(\gamma) = l_{\|\cdot\|}(\gamma|_{[a,r]}) + l_{\|\cdot\|}(\gamma|_{[r,b]}).$$

(b) Ist γ rektifizierbar, so ist die Abbildung $[a,b] \ni r \mapsto l_{\|\cdot\|}(\gamma|_{[a,r]})$ stetig und monoton wachsend.

Aufgabe 42) (Differenzierbare Kurven und Bogenlänge) (4 Punkte)

Sei $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir nennen die Kurve γ *differenzierbar* in $t \in [a,b]$, wenn es ein $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gibt mit

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ t+h\in[a,b]}} \left\| \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} - T \right\| = 0.$$

Wir schreiben dann $\gamma'(t)$ bzw. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t)$ statt T. Der Begriff der (stückweise) stetigen Differenzierbarkeit wird dann analog zum Fall von vektorwertigen Kurven eingeführt.

Zeigen Sie:

(a) Für $Y \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist $t \mapsto \exp(tY)$ in jedem Punkt differenzierbar mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tY) = Y\exp(tY) = \exp(tY)Y.$$

(b) Für jede (stückweise) stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt

$$\|\gamma(b)-\gamma(a)\| \le \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Tipp: Für $x,y \in \mathcal{H}$ betrachte man $t \mapsto \langle y, \gamma(t)x\rangle$.

(c) Jede (stückweise) stetig differenzierbare Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist rektifizierbar mit

$$l_{\|\cdot\|}(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

bitte wenden

Aufgabe 43) (Spektralvariation für normale Operatoren) (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal. Zeigen Sie:

(a) Die Differenz $A - B$ ist genau dann normal, wenn $(1-t)A + tB$ für alle $t \in (0,1)$ normal ist.

(b) Sind die Eigenwerte von A und B in zwei parallelen Geraden $L_A, L_B \subset \mathbb{C}$ enthalten, also $\sigma(A) \subset L_A$ und $\sigma(B) \subset L_B$, so gilt

$$d([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq \|A - B\|.$$

Tipp: Satz 5.22 der Vorlesung.

(c) Sind die Eigenwerte von A und B in zwei konzentrischen Kreisen $K_A, K_B \subset \mathbb{C}$ enthalten, also $\sigma(A) \subset K_A$ und $\sigma(B) \subset K_B$, so gilt

$$d([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq \|A - B\|.$$

Aufgabe 44) (Zum Satz von Hofman-Wielandt; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermitesch und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(a) Über Schurzerlegung von B schreiben wir $Q^*BQ = D + R$ mit Q unitär, $D = \operatorname{diag}(\lambda(B))$ Diagonalmatrix und R strikte obere Dreiecksmatrix.

Zeigen Sie:

i) $\|\operatorname{Im}(A - B)\|_2^2 = \|\operatorname{Im}(D)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|R\|_2^2$;

ii) $\|A - Q\operatorname{Re}(D)Q^*\|_2 \leq \|\operatorname{Re}(A - B)\|_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\|R\|_2$.

(b) Seien mit $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ und $\operatorname{Re}(\lambda_1(B)) \geq \cdots \geq \operatorname{Re}(\lambda_n(B))$ Anordnungen der Eigenwerte von A und B gegeben.

Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und des Satzes von Hofman-Wielandt, dass dann

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(B)|^2\Big)^{1/2} \leq \sqrt{2}\|A - B\|_2.$$