Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Notation: Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $M \subset \mathbb{C}$ bezeichne $m_A(M)$ die Anzahl der Eigenwerte von A , die in M liegen (mit Vielfachheiten gezählt).

Aufgabe 37) (Weyl's Störungssatz für unitäre Matrizen) (4 Punkte)

- (a) Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal und $K, L \subset \mathbb{C}$ konvex mit $m_A(K) \leq k$ und $m_B(L) \geq n - k + 1$ für ein $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie, dass dann $\text{dist}(K, L) \leq \|A - B\|$ gilt.
- (b) Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ unitär, deren Eigenwerte sämtlich in einem Halbkreis des komplexen Einheitskreises liegen. Wir nehmen an, dass die Eigenwerte $\lambda_j(A)$ und $\lambda_j(B)$ jeweils gegen den Uhrzeigersinn angeordnet sind. Zeigen Sie:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(B)| \leq \|A - B\|.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt also $d([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq \|A - B\|$.

Aufgabe 38) (Eigenwerte unitärer Operatoren) (4 Punkte)

Sei S der komplexe Einheitskreis und $I \subset S$ ein abgeschlossener Kreisbogen in S . Für $\varepsilon > 0$ sei ferner $I_\varepsilon \subset S$ der Kreisbogen $\{z \in S \mid |z - w| \leq \varepsilon \text{ für ein } w \in I\}$.

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ unitär. Wir wollen

$$m_A(I) \leq m_B(I_\varepsilon)$$

mit $\varepsilon = \|A - B\|$ zeigen. Unterscheiden Sie dazu die beiden folgenden Fälle für die Bogenlängen $l(I)$ und $l(S \setminus I_\varepsilon)$ von I bzw. $S \setminus I_\varepsilon$:

- (a) $l(I) \neq l(S \setminus I_\varepsilon)$.

Tipp: Man zeichne ein Bild!

- (b) $l(I) = l(S \setminus I_\varepsilon)$.

Tipp: Man kann dies als Grenzfall von (a) auffassen.

Aufgabe 39) (Determinanten) (4 Punkte)

- (a) Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermitesch und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schief-hermitesch mit Eigenwerten λ_j bzw. μ_j angeordnet nach

$$|\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad \text{und} \quad |\mu_1| \geq \dots \geq |\mu_n|.$$

Zeigen Sie: $|\det(A + B)| \leq \prod_{j=1}^n |\lambda_j + \mu_{n-j+1}|$.

- (b) Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nichtnegativ und $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schief-hermitesch. Zeigen Sie:

$$|\det(A + B)| = \det(A) \prod_{j=1}^n (1 + s_j(A^{-1/2} B A^{-1/2})^2)^{1/2} \geq \det(A).$$

bitte wenden

Aufgabe 40) (Weyl's Störungssatz für hermit. und normale Operatoren; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal.

- (a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Hoffman-Wielandt:

$$d([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq \sqrt{n} \|A - B\|, \quad \text{wobei } n = \dim \mathcal{H}.$$

Bemerkung: Wir werden später sogar $d([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq c \|A - B\|$ mit einer dimensionsunabhängigen Konstanten $c < 3$ zeigen.

- (b) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ zusätzlich hermitesch, und seien die Eigenwerte von A und B angeordnet nach $\lambda_1(A) \geq \dots \geq \lambda_n(A)$ bzw. $\operatorname{Re} \lambda_1(B) \geq \dots \geq \operatorname{Re} \lambda_n(B)$. Zeigen Sie:

$$\max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j(A) - \lambda_j(B)| \leq \sqrt{2} \|A - B\|.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt also $d([\lambda(A)], [\lambda(B)]) \leq \sqrt{2} \|A - B\|$.