7. Übung zur Vorlesung Gruppentheorie in der Physik

Ute Löw

Abgabe am Donnerstag, den 06.06.2019 bis 12:00 Uhr Sommersemester 19

Aufgabe 1: U(N) und SO(2N) (8 Punkte)

In dieser Aufgabesoll die unitäre Gruppe näher untersucht werden. Wir betrachten die Menge der unitären Matrizen $U(n) = \left\{U \in GL(n, \mathbb{C}) | UU^\dagger = I_n\right\}$. Die spezielle unitäre Gruppe ist die echte Untergruppe derjenigen Elemente U aus $U(n)$, für die gilt $\det(U) = 1$.

a) Zeigen Sie zuerst, das $U(n)$ eine Gruppe ist.

b) Durch wie viele unabhängige (reelle) Parameter wird ein Element der $U(n)$ beschrieben? Durch wie viele ein Element der $SU(n)$. Begründen Sie ihr Ergebnis.

c) Zeigen Sie, dass sich die U(n) in die spezielle orthogonale Gruppe $SO(2n) = \left\{A \in GL(2n, \mathbb{R}) | AA^T = I_{2n} \text{ und } \det(A) = 0\right\}$ einbetten lässt.

Hinweis: Finden Sie in Teil c) eine injektive lineare Abbildung, die komplexe $n \times n$ Matrizen als reelle $2n \times 2n$ Matrizen geeigneter Form schreibt. Zeigen Sie, dass das Bild von $U(n)$ unter dieser Abbildung in $SO(2n)$ liegt.
Möglicherweise hilfreich ist der folgende Zusammenhang für Determinanten von Blockmatrizen

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A + \mathrm{i}B)\det(A - \mathrm{i}B) \tag{1}$$

Aufgabe 2: Casimir-Operator und Dynkin-Index (6 Punkte)

Die Generatoren t^a der SU(N) sind die Erzeugenden der infinitesimalen Gruppentransformationen und erfüllen die Kommutatorrelation

$$\left[t^a, t^b\right] = \mathrm{i} {f_c}^{ab} t^c \,, \tag{2}$$

wobei ${f_c}^{ab}$ die Strukturkonstanten sind.

a) Der quadratische Casimir-Operator ist definiert durch

$$t^2 = \sum_{i=1}^{d(G)} t^i t^i \tag{3}$$

Zeigen Sie, dass der quadratische Casimir-Operator für eine beliebig dimensionale irreduzible Darstellung R ein Vielfaches der Einheitsmatrix $t^2 = C_2(R)\mathbb{1}_R$ ist.

b) Der Dynkin-Index $S_2(R)$ ist definiert als

$$Tr(t^i t^j) = S_2(R)\delta^{ij} \tag{4}$$

und in der Physik konventionell normiert auf $S_2(R) = \frac{1}{2}$. Drücken Sie die Strukturkonstanten in Abhängigkeit des Dynkin-Indexes und der Generatoren aus. Welche Eigenschaft der Strukturkonstanten folgen aus diesem Ausdruck.

c) Leiten Sie die Relation

$$C_2(R)d(R) = S_2(R)d(G) \tag{5}$$

her und überprüfen Sie diese für die fundamentale Darstellung der SU(2) (bestimmen Sie auch explizit den Dynkin-Index), deren Generatoren gegeben sind durch $t^a = \frac{\sigma^a}{2}$. Hierbei sind die σ^a die Pauli Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6}$$