technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. Albrecht Seelmann

Dr. Michela Egidi

9. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Notation: Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schreiben wir $\mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(A)$ für eine $n \times n$ Diagonalmatrix, deren Diagonaleinträge die nach Betrag absteigend sortierten Eigenwerte von A sind, d.h. $\mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(A) = \mathrm{diag}(\lambda(A))$ mit $|\lambda_1(A)| \geq \cdots \geq |\lambda_n(A)|$. Entsprechend bezeichnet $\mathrm{Eig}^{|\uparrow|}(A)$ eine $n \times n$ Diagonalmatrix mit den nach Betrag aufsteigend sortierten Eigenwerten von A.

Aufgabe 33) (Verallgemeinerungen von Weyl's Störungssatz I) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein hermitescher Operator mit Eigenwerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so, dass $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots \geq |\alpha_n|$, und sei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schief-hermitescher Operator mit Eigenwerten $\beta_1, \ldots, \beta_n$ so, dass $|\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \ldots \geq |\beta_n|$. Seien ferner $Q, W \colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}$ unitär.
Zeigen Sie: Für jede unitär invariante Norm $|||\cdot|||$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt

(a) $|||W(\mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(A) - \mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(B))Q^*||| \leq 2|||A - B|||$.

Tipp: Man beachte die Bemerkung zu Satz 3.17 der Vorlesung.

(b) $|||A - B||| \leq \sqrt{2}|||W(\mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(A) - \mathrm{Eig}^{|\uparrow|}(B))Q^*|||$.

Tipp: Aufgabe 11 (c).

Aufgabe 34) (Verallgemeinerungen von Weyl's Störungssatz II) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein hermitescher Operator mit Eigenwerten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ so, dass $|\alpha_1| \geq |\alpha_2| \geq \ldots \geq |\alpha_n|$, und sei $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ schief-hermitescher Operator mit Eigenwerten $\beta_1, \ldots, \beta_n$ so, dass $|\beta_1| \geq |\beta_2| \geq \ldots \geq |\beta_n|$.
Zeigen Sie: Für $2 \leq p < \infty$ gilt

(a) $\|A - B\|_p \leq 2^{1-\frac{2}{p}} \|\mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(A) - \mathrm{Eig}^{|\uparrow|}(B)\|_p$,

(b) $\|\mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(A) - \mathrm{Eig}^{|\downarrow|}(B)\|_p \leq 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}} \|A - B\|_p$.

Tipp: Gehen Sie ähnlich wie im Beweis von Satz 5.11 vor, der am kommenden Mittwoch in der Vorlesung besprochen wird.

Aufgabe 35) (Komplementäre Minkowski-Ungl. für $p < 1$; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $0 < p < 1$ und jede symmetrische Eichfunktion Φ gilt

$$\Phi(|x+y|^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(\Phi(|x|^p)^{\frac{1}{p}} + \Phi(|y|^p)^{\frac{1}{p}}\right) \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Tipp: Zeige zuerst $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ für $0 < p < 1$ und für alle $a, b \in [0, \infty)$

(b) Zeigen Sie: Für $0 < p < 1$, alle $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, und jede unitär invariante Norm $|||\cdot|||$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt

$$|||\,|A+B|^p\,|||^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}-1}\left(|||\,|A|^p\,|||^{\frac{1}{p}} + |||\,|B|^p\,|||^{\frac{1}{p}}\right).$$

bitte wenden

Aufgabe 36) (Der Hausdorff-Abstand) (4 Punkte)

Für abgeschlossene Mengen $L, M \subset \mathbb{C}$ setzen wir

$$s(L, M) := \sup_{\lambda \in L} \operatorname{dist}(\lambda, M) = \sup_{\lambda \in L} \inf_{\mu \in M} |\lambda - \mu|$$

und definieren

$$h(L, M) := \max\{s(L, M), s(M, L)\}.$$

Wir nennen $h(L, M)$ den *Hausdorff-Abstand* zwischen L und M.

(a) Zeigen Sie, dass $s(L, M) = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn $L \subset M$ gilt. Schließen Sie damit, dass der Hausdorff-Abstand eine Metrik auf dem System der abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{C}$ definiert.

Wir betrachten nun speziell $L := \bigcup_{j=1}^{n} \{\lambda_j\}$ und $M := \bigcup_{k=1}^{n} \{\mu_k\}$ für zwei gegebene ungeordnete Tupel $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n], [\mu_1, \ldots, \mu_n] \in \mathbb{C}^n_{\text{sym}}$.
Zeigen Sie:

(b) Es gilt stets $h(L, M) \leq d([\lambda_1, \ldots, \lambda_n], [\mu_1, \ldots, \mu_n])$, wobei d den in der Vorlesung eingeführten Optimalen Matching Abstand bezeichnet.

(c) Im Spezialfall $n = 2$ gilt stets $h(L, M) = d([\lambda_1, \ldots, \lambda_n], [\mu_1, \ldots, \mu_n])$.