6. Übung zur Vorlesung Gruppentheorie in der Physik

Ute Löw

Abgabe am Mittwoch, den 29.05.2019 bis 12:00 Uhr Sommersemester 19

Aufgabe 18: Wiederholung zur SU(2) (12 Punkte)

Aus der Quantenmechanik sind Ihnen die Drehimpulsoperatoren J_i bekannt, welche die Lie-Algebra der SU(2) erfüllen

$$\left[J_i, J_j\right] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_k \,. \tag{1}$$

Hierbei ist ϵ_{ijk} das total antisymmetrische Levi-Cevita-Symbol mit $\epsilon_{123} = 1$. Da $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ und J_3 kommutieren, haben sie eine gemeinsame (normierte) Eigenbasis

$$J^2 \left|\alpha, m\right\rangle = \alpha \left|\alpha, m\right\rangle \,, \tag{2}$$

$$J_3 \left|\alpha, m\right\rangle = m \left|\alpha, m\right\rangle \,. \tag{3}$$

Die Leiteroperatoren werden definiert durch

$$J_\pm = J_1 \pm \mathrm{i} J_2 \,. \tag{4}$$

a) Berechnen Sie die Vertauschungsrelationen

   1) $[J_+, J_-]$

   2) $[J_3, J_\pm]$

   3) $\left[J^2, J_\pm\right]$

   und drücken Sie den Operator J^2 durch die Leiteroperatoren und J_3 aus.

b) Zeigen Sie, dass die Leiteroperatoren den Eigenwert von J_3 um eins verändern und dabei den Eigenwert von J^2 erhalten

$$J_\pm \left|\alpha, m\right\rangle = A_m^\alpha \left|\alpha, m \pm 1\right\rangle \,. \tag{5}$$

   Bestimmen Sie zusätzlich A_m^α.

c) Betrachten Sie

$$\left\langle \alpha, m \middle| J_1^2 + J_2^2 \middle| \alpha, m \right\rangle \,. \tag{6}$$

   Welche Einschränkung für α und m folgt aus dieser Größe?

d) Bestimmen Sie die möglichen Dimensionen der irreduziblen Darstellungen. Leiten Sie hierfür einen Zusammenhang zwischen einem festen α und dem maximalen bzw minimalen Wert für m her. Hierbei sei

$$\max m = j \qquad \text{und} \qquad \min m = j' \,. \tag{7}$$

   Gibt es einen Zusammenhang zwischen j und j'? Welche Werte für sind für j und m möglich? Um die Dimension der Darstellungen zu erhalten, zählen Sie die Anzahl der Zustände mit einem festen α bzw. j.

e) Konstruieren Sie die vierdimensionale irreduzible Darstellung der SU(2) Generatoren.

Aufgabe 19: Adjungierte Darstellung der SU(N) **(8 Punkte)**

Die Generatoren t^a der SU(N) erfüllen die Kommutatorrelation

$$\left[t^a, t^b\right] = \mathrm{i} f_c{}^{ab} t^c \,, \tag{8}$$

wobei $f_c{}^{ab}$ die Strukturkonstanten sind.

a) Zeigen Sie, dass die Jacobi-Identität

$$\left[t^a, \left[t^b, t^c\right]\right] + \left[t^b, [t^c, t^a]\right] + \left[t^c, \left[t^a, t^b\right]\right] = 0 \tag{9}$$

gilt und leiten Sie damit die folgenden Beziehung her:

$$f_e{}^{ad} f_d{}^{bc} + f_e{}^{bd} f_d{}^{ca} + f_e{}^{cd} f_d{}^{ab} = 0 \tag{10}$$

b) Jede einfache Lie Algebra hat eine adjungierte Darstellung. Die entsprechenden Generatoren lassen sich mit den Strukturkonstanten schreiben als:

$$(t^b)_{ac} = \mathrm{i} f_c{}^{ab} \,. \tag{11}$$

Zeigen Sie, dass diese Generatoren die folgende Lie Algebra erfüllen

$$\left([t^a, t^c]\right)_{be} = \mathrm{i} f_d{}^{ac} \left(t^d\right)_{be} \tag{12}$$

Beachten Sie hierbei, dass die Strukturkonstanten antisymmetrisch sind $f_c{}^{ab} = -f_c{}^{ba}$.