technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Dr. Albrecht Seelmann

Dr. Michela Egidi

8. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Bemerkung: Ab diesem Blatt ist die Abgabe **Mittwoch**, 14 Uhr.

Aufgabe 29) (Verallg. Hölder-Ungl. für unitär inv. Normen) (4 Punkte)

Sei $|||\cdot|||$ eine unitär invariante Norm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(a) Seien $p, q, r \in (0, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1/r$. Zeigen Sie, dass

$$|||\,|AB|^r\,|||^{1/r} \leq |||\,|A|^p\,|||^{1/p} \cdot |||\,|B|^q\,|||^{1/q}$$

für alle $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt.

(b) Folgern Sie aus Teil (a) noch einmal die Ungleichung

$$|||AB||| \leq |||A^*A|||^{1/2} \cdot |||B^*B|||^{1/2}$$

aus der Bemerkung zu Satz 4.15 der Vorlesung.

Aufgabe 30) (Weyl's Störungssatz für die Frobeniusnorm; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ nichtnegativ gilt

$$\lambda^{\downarrow}(A) \cdot \lambda^{\uparrow}(B) \prec_w \lambda(AB) \prec_w \lambda^{\downarrow}(A) \cdot \lambda^{\downarrow}(B).$$

Tipp: Folgerung 3.16 der Vorlesung im Fall, dass B invertierbar ist.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass

$$\langle \lambda^{\downarrow}(A), \lambda^{\uparrow}(B) \rangle_{\mathbb{R}^n} \leq \operatorname{Spur}(AB) \leq \langle \lambda^{\downarrow}(A), \lambda^{\downarrow}(B) \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

für alle hermiteschen $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Tipp: Man betrachte $\operatorname{Spur}((A + tI)(B + tI))$ für geeignetes $t \geq 0$.

(c) Verwenden Sie Teil (b), um

$$\|W\big(\operatorname{Eig}^{\downarrow}(A) - \operatorname{Eig}^{\downarrow}(B)\big)Q^*\|_2 \leq \|A - B\|_2 \leq \|W\big(\operatorname{Eig}^{\downarrow}(A) - \operatorname{Eig}^{\uparrow}(B)\big)Q^*\|_2$$

für alle hermiteschen $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und alle unitären $Q, W \colon \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}$ zu zeigen. Hierbei sei wie üblich $\operatorname{Eig}^{\downarrow}(A) := \operatorname{diag}(\lambda^{\downarrow}(A))$ und $\operatorname{Eig}^{\uparrow}(A) := \operatorname{diag}(\lambda^{\uparrow}(A))$.

Bemerkung: Dies ist also ein alternativer Beweis für die Aussage aus Beispiel 4.11 (a) der Vorlesung im Spezialfall der Hilbert-Schmidt-Norm.

bitte wenden

Aufgabe 31) (Zum Spektralradius) (4 Punkte)

Zeigen Sie Satz 4.20 der Vorlesung: Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und jede unitär invariante Norm $|||\cdot|||$ auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt

$$\operatorname{spr}(A) = \lim_{k\to\infty} |||A^k|||^{1/k} \leq |||A|||,$$

wobei $\operatorname{spr}(A) = \max\{|\lambda| \colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$ wie üblich den Spektralradius von A bezeichnet.

Tipp: Zeigen Sie zunächst $\operatorname{spr}(A) \leq |||A|||$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Man beachte außerdem Lemma 4.19 der Vorlesung.

Aufgabe 32) (Eine subadditive Funktion auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) (4 Punkte)

Sei $f \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ konkav und monoton wachsend.

(a) Sei $F \colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \to [0,\infty)$ definiert durch $F(A) := \sum_{j=1}^{n} f(s_j(A))$ für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass F *subadditiv* ist, d.h.

$$F(A+B) \leq F(A) + F(B) \quad \text{für alle} \quad A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Tipp: Man betrachte zuerst den Fall, dass A und B nichtnegativ sind. Hier können Satz 4.17 und Folgerung 2.13 der Vorlesung hilfreich sein. Für den allgemeinen Fall beachte man Satz 3.19 der Vorlesung.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) die Ungleichung

$$\det(I + |A+B|) \leq \det(I + |A|)\det(I + |B|)$$

für $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.