

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 25) (Realteil und Absolutbetrag von Operatoren) (4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass es zu jedem Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ einen unitären Operator $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\operatorname{Re}(A) \leq U^*|A|U$ gibt.

Tipp: Satz 3.17 der Vorlesung.

- (b) Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ derart, dass es *kein* unitäres $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit

$$|A + B| \leq U^*(|A| + |B|)U$$

gibt.

Aufgabe 26) (Duale symmetrische Eichfunktionen) (4 Punkte)

Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ eine symmetrische Eichfunktion.

- (a) Wir definieren $\Phi': \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ durch

$$\Phi'(x) := \sup_{\Phi(y)=1} |\langle x, y \rangle|.$$

Zeigen Sie, dass Φ' wieder eine symmetrische Eichfunktion ist. Wir nennen Φ' die zu Φ *duale symmetrische Eichfunktion*.

- (b) Zeigen Sie, dass

$$|\langle x, y \rangle| \leq \Phi(x)\Phi'(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

- (c) Sei Ψ eine weitere symmetrische Eichfunktion mit $\Phi(x) \leq c\Psi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer Konstanten $c > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\Phi'(x) \geq c^{-1}\Psi'(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

gilt, wobei Ψ' analog zu (a) die zu Ψ duale symmetrische Eichfunktion bezeichnet.

Aufgabe 27) (Die zu Φ_p duale symmetrische Eichfunktion) (4 Punkte)

Seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $1/p + 1/q = 1$, wobei wir $1/\infty := 0$ setzen. Zeigen Sie, dass die gemäß Aufgabe 26) zu Φ_p duale symmetrische Eichfunktion durch Φ_q gegeben ist, d.h.

$$\Phi'_p = \Phi_q.$$

Aufgabe 28) (Eine duale symm. Eichfunktion; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die zu $\Phi_{(k)}$, $1 \leq k \leq n$, duale symmetrische Eichfunktion (vgl. Aufgabe 26)) durch

$$\Phi'_{(k)}(x) = \max \left\{ \Phi_{(1)}(x), \frac{1}{k} \Phi_{(n)}(x) \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

gegeben ist.

Tipp: Beachten Sie die Aufgaben 26) und 27) sowie Lemma 4.4 der Vorlesung.

Abgabe bis Dienstag, den 21. Mai 2019, um 14 Uhr in den Übungskasten.