Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 21) (Singularwerte von Summen und Produkten) (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $j, k \in \{1, \dots, n\}$ mit $j + k \leq n + 1$. Zeigen Sie:

$$s_{j+k-1}(A + B) \leq s_j(A) + s_k(B) \quad \text{und} \quad s_{j+k-1}(AB) \leq s_j(A)s_k(B).$$

Aufgabe 22) (Ky Fan Maximumprinzip für Singularwerte) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie für $1 \leq k \leq n$:

$$\sum_{j=1}^k s_j(A) = \max \left| \sum_{j=1}^k \langle x_j, UAx_j \rangle \right|,$$

wobei das Maximum über alle k -Tupel $(x_1, \dots, x_k)$ orthonormaler Vektoren über $\mathcal{H}$ und alle unitären Operatoren $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gebildet wird.

Tipp: Unter anderem Weyl's Majorantensatz.

Bemerkung: Eine offensichtlich äquivalente Formulierung der obigen Identität ist

$$\sum_{j=1}^k s_j(A) = \max \left| \sum_{j=1}^k \langle y_j, Ax_j \rangle \right|,$$

wobei das Maximum über alle k -Tupel $(x_1, \dots, x_k)$ und $(y_1, \dots, y_k)$ orthonormaler Vektoren über $\mathcal{H}$ gebildet wird.

Aufgabe 23) (Majorisierung für Singularwerte) (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass

$$|s(A) - s(B)| \prec_w s(A - B)$$

gilt.

Aufgabe 24) (Singularwerte von Produkten; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass für alle Wahlen von Indizes $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$, $1 \leq k \leq n$, die Ungleichung

$$\prod_{l=1}^k s_{j_l}(AB) \leq \prod_{l=1}^k s_l(A)s_{j_l}(B)$$

gilt, wobei Gleichheit für $k = n$ auftritt.

Tipp: Man betrachte zunächst den Fall, dass A und B invertierbar sind. Hier adaptiere man den Beweis des Satzes von Lidskii aus der Vorlesung unter Verwendung einer Singularwertzerlegung.