Dr. Albrecht Seelmann

Dr. Michela Egidi

5. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Bemerkung: Auf diesem Blatt befindet sich diesmal keine Bonusaufgabe. Alle 4 Aufgaben (für insgesamt 12 Punkte) gehören damit zum Pflichtteil.

Aufgabe 17) (Störung der Eigenwerte) (2 Punkte)

Seien $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermitesch und $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\dim \operatorname{Bild}(H) = r$. Zeigen Sie, dass für $1 \le k \le n - r$ dann

$$\lambda_k^{\downarrow}(A) \ge \lambda_{k+r}^{\downarrow}(A + H)$$

gilt.

Aufgabe 18) (Schachtelung bei Singulärwerten) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ein Unterraum mit $\dim \mathcal{M} = n - r$ für ein r mit $2r \le n - 1$. Zeigen Sie: Für die Kompression B von A auf $\mathcal{M}$ gilt

$$s_k(B) \ge s_{k+2r}(A), \quad 1 \le k \le n - 2r.$$

Tipp: Für geeignetes $T = \begin{pmatrix} B & * \\ * & * \end{pmatrix}$ vergleiche man A^*A, T^*T und TT^*.

Aufgabe 19) (Eine weitere Ungleichung für die Determinante) (2 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times k}$ mit $k \le n$. Zeigen Sie: Es gilt

$$|\det(A^*B)|^2 \le \det(A^*A)\det(B^*B),$$

wobei Gleichheit für $k = n$ auftritt.

Aufgabe 20) (Eine Charakterisierung der Singulärwerte) (4 Punkte)

Für $k \in \{0, \dots, n\}$ sei $\mathcal{R}_k := \{T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \colon \dim \operatorname{Bild}(T) \le k\}$.

(a) Zeigen Sie die folgende Charakterisierung der Singulärwerte von $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$:

$$s_k(A) = \min_{T \in \mathcal{R}_{k-1}} \|A - T\|, \quad 1 \le k \le n.$$

Zeigen Sie nun unter Verwendung von (a):

(b) Für $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ gilt

$$\max_{1 \le k \le n} |s_k(A) - s_k(B)| \le \|A - B\|.$$

(c) Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $H \in \mathcal{R}_r$ gilt

$$s_k(A) \ge s_{k+r}(A + H), \quad 1 \le k \le n - r.$$

Abgabe bis Dienstag, den 7. Mai 2019, um 14 Uhr in den Übungskasten.