Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 13) (Submajorisierung) (4 Punkte)

- (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zeigen Sie, dass A genau dann doppelt-substochastisch ist, wenn für alle $x \in [0, \infty)^n$ sowohl $Ax \in [0, \infty)^n$ als auch $Ax \prec_w x$ gilt.
- (b) Zeigen Sie Teil (b) aus Satz 2.11 der Vorlesung: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $x \prec_w y$ genau dann, wenn $\text{Spur } f(x) \leq \text{Spur } f(y)$ für alle konvexen, monoton wachsenden Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Aufgabe 14) (Isotone Funktionen) (4 Punkte)

- (a) Führen Sie den Beweis von Folgerung 2.14 der Vorlesung: Seien $x, y \in [0, \infty)^n$ mit $\prod_{j=1}^k x_j^\downarrow \leq \prod_{j=1}^k y_j^\downarrow$ für alle $1 \leq k \leq n$. Dann gilt $f(x) \prec_w f(y)$ für alle monoton wachsenden Funktionen $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, für die $\mathbb{R} \ni t \mapsto f(e^t)$ konvex ist.
- (b) Sei $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) := \max_{P \in \sigma_n} \Psi(Px)$, wobei σ_n die Menge der $n \times n$ Permutationsmatrizen bezeichnet. Zeigen Sie, dass Φ Schur-konvex ist, und sogar stark isoton, falls Ψ zusätzlich monoton wachsend ist.
- (c) Seien $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und $1 \leq k \leq n$. Die Funktion $f_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f_k(x) = \max_{\sigma} \sum_{j=1}^k f(x_{\sigma(j)})$, wobei das Maximum über alle Permutationen σ der Menge $\{1, \dots, n\}$ gebildet wird. Zeigen Sie, dass f_k Schur-konvex ist, und sogar stark isoton, falls f zusätzlich monoton wachsend ist.

Aufgabe 15) (Majorisierungen für Summen; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^\downarrow + y^\uparrow \prec x + y \prec x^\downarrow + y^\downarrow$.
- (b) Es gilt

$$-\log(x^\downarrow + y^\uparrow) \prec_w -\log(x + y) \prec_w -\log(x^\downarrow + y^\downarrow) \quad \text{für } x, y \in (0, \infty)^n$$

und

$$\prod_{j=1}^n (x_j^\downarrow + y_j^\downarrow) \leq \prod_{j=1}^n (x_j + y_j) \leq \prod_{j=1}^n (x_j^\downarrow + y_j^\uparrow) \quad \text{für } x, y \in [0, \infty)^n.$$

Aufgabe 16) (Symmetrische Eichfunktionen) (4 Punkte)

Sei $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ gegeben mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Φ ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$;
- (2) Φ ist permutationsinvariant, d.h. es gilt $\Phi(Px) = \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $P \in \sigma_n$;
- (3) Φ ist *absolut*, d.h. es gilt $\Phi(x_1, \dots, x_n) = \Phi(|x_1|, \dots, |x_n|)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$;
- (4) Φ ist *normiert*, d.h. es gilt $\Phi(1, 0, \dots, 0) = 1$.

Man nennt Φ eine *symmetrische Eichfunktion*. Bekannte Beispiele solcher Funktionen sind $\Phi_p(x) = (\sum_{j=1}^n |x_j|^p)^{1/p}$ für $1 \leq p < \infty$ und $\Phi_\infty(x) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$.

Zeigen Sie:

- (a) Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $|x| \leq |y|$ (d.h. $|x_j| \leq |y_j|$ für $1 \leq j \leq n$) gilt $\Phi(x) \leq \Phi(y)$.
Tipp: Iteration über die Koordinaten. Man betrachte hierbei geeignete Konvexkombinationen.
- (b) Für $x, y \in [0, \infty)^n$ mit $x \prec_w y$ gilt $\Phi(x) \leq \Phi(y)$.

Bemerkung: Symmetrische Eichfunktionen werden im späteren Verlauf der Vorlesung noch eine große Rolle spielen.