Dr. Albrecht Seelmann

Dr. Michela Egidi

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Hinweis: Wegen Ostern ist der Abgabetermin für dieses Blatt ausnahmsweise erst *Mittwoch, der 24. April, 14 Uhr.*

Aufgabe 9) (Doppelt-stochastische Matrizen) (4 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die doppelt-stochastischen $n \times n$ Matrizen eine konvexe Menge bilden, die abgeschlossen unter Multiplikation und Adjungieren ist (d.h. sind A, B doppelt-stochastische $n \times n$ Matrizen, so auch AB und A^*). Zeigen Sie ferner, dass diese Menge keine Gruppe bzgl. der Matrixmultiplikation darstellt.

(b) Sei A doppelt-stochastisch. Zeigen Sie, dass $\operatorname{spr}(A) = 1 = \|A\|$ gilt, wobei $\operatorname{spr}(A)$ wie üblich den Spektralradius von A bezeichnet (d.h. den Betrag des betragsmäßig größten Eigenwerts).

Notation: Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bezeichne $s(A) = (s_1(A), \ldots, s_n(A))^T$ den Vektor der absteigend sortierten Singulärwerte von A und $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))^T$ den Vektor der Eigenwerte von A (in irgendeiner Reihenfolge). Ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so sei schließlich $\operatorname{diag}(A) \in \mathbb{C}^n$ die Diagonale von A.

Aufgabe 10) (Satz von Schur) (4 Punkte)

(a) Sei $U = (u_{jk}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär. Zeigen Sie, dass die Matrix $(|u_{jk}|^2)$ doppelt-stochastisch ist.

Bemerkung: Man nennt $(|u_{jk}|^2)$ *unitär-stochastisch* (bzw. *orthostochastisch*, falls U reell orthogonal ist).

(b) (Satz von Schur) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{diag}(A) \prec \lambda(A).$$

Tipp: Spektralsatz.

bitte wenden

Aufgabe 11) (Ky Fan's Maximumprinzip) (4 Punkte)

(a) (Ky Fan's Maximumprinzip) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ hermitesch. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 10), dass für alle $1 \le k \le n$ die Identität

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}(A) = \max \sum_{j=1}^{k} \langle x_j, Ax_j \rangle$$

gilt, wobei das Maximum über alle k-Tupel $(x_1, \dots, x_k)$ orthonormaler Vektoren über $\mathcal{H}$ gebildet wird.

(b) Zeigen Sie: Für hermitesche $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $1 \le k \le n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}(A+B) \le \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}(A) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{\downarrow}(B).$$

(c) Zeigen Sie: Für $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $1 \le k \le n$ gilt

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A+B) \le \sum_{j=1}^{k} s_j(A) + \sum_{j=1}^{k} s_j(B).$$

Tipp: Man beachte Satz 1.5 der Vorlesung.

Bemerkung: Dies zeigt, dass die Größe $\|A\|_{(k)} := \sum_{j=1}^{k} s_j(A)$ für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Norm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert, die sogenannte *Ky Fan k-norm*.

Aufgabe 12) (Pinchings von Operatoren; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Sei $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ und $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Wir definieren dazu $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ durch $\mathcal{C}(A) := \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

(a) $s(\mathcal{C}(A)) \prec_w s(A)$.

(b) $\lambda(\mathcal{C}(A)) \prec \lambda(A)$, falls A hermitesch.

Tipp: Man schreibe $\mathcal{C}(A)$ in der Form $\mathcal{C}(A) = \frac{1}{2}(A + UAU^*)$ mit geeignetem U.
Bemerkung: Man nennt $\mathcal{C}(A)$ ein *Pinching* von A.