
1. Übung zur Vorlesung Gruppentheorie in der Physik

Sommersemester 19

(1) Kleine Beweise (8 P)

- (a) Zeigen Sie, dass das Einselement E einer Gruppe eindeutig ist.
- (b) Zeigen Sie, dass das inverse Element A^{-1} zu einem Gruppenelement A eindeutig ist.
- (c) Beweisen Sie das Rearrangement Theorem (d.h. zeigen Sie, dass jedes Gruppenelement genau einmal in einer Zeile der Multiplikationstafel vorkommt.)
- (d) Zeigen Sie, dass zwei Nebenklassen einer Untergruppe entweder disjunkt oder gleich sind.

(2) Die Kongruenzgruppe des Quadrates (12 P)

Betrachten Sie die Kongruenzgruppe D_4 des Quadrates.

- (a) Notieren Sie alle Symmetrieoperationen (Hinweis: die Gruppe hat Ordnung 8).
- (b) Stellen Sie die Multiplikationstabelle auf.
- (c) Teilen Sie die Gruppenelemente in (Konjugations)-Klassen ein.
- (d) Finden Sie alle Untergruppen.
- (e) Welche Untergruppen sind invariante Untergruppen?
- (f) Geben Sie die Nebenklassen zu den invarianten Untergruppen an.
- (g) Geben Sie alle Elemente der Faktorgruppen an.
- (h) Gibt es weitere nichtablesche Gruppen vom Ordnung 8?

(4) Permutationen (8 P)

Betrachten Sie Permutationen von n verschiedenen Objekten und zeigen Sie: Besteht eine Permutation aus a Zyklen der Länge 1, aus b Zyklen der Länge 2, aus c Zyklen der Länge 3 ... so, dass

$$n = a + 2b + 3c + \dots$$

dann gibt es im Ganzen

$$\frac{n!}{1^a a! 2^b b! 3^c c! \dots}$$

Permutationen von diesem Typ und die Anzahl der verschiedenen Klassen ist gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung $n = a + 2b + 3c + \dots$

(3) Die Gruppe der Quaternionen Q8 (8 P)

Analysieren Sie die Gruppenstruktur der Quaternionen.

- (a) Finden Sie die invarianten Untergruppen und deren Nebenklassen.
- (b) Versuchen Sie eine Abbildung der Quaternionen Gruppe Q8 auf eine Untergruppe einer Permutationsgruppe zu finden und diskutieren Sie die Klassenstruktur.

(5) Klassenstruktur von Permutationen (4 P)

Zeigen Sie, dass die Elemente einer Klasse von Permutationen identische Struktur haben, das heißt zeigen Sie, dass die Klassen gleich viele Zyklen gleicher Länge haben.