
Aufgabe 5) (Die Polarzerlegung) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein Operator.

- (a) Zeigen Sie, dass A genau dann normal ist, wenn seine Faktoren U und $|A|$ aus der Polarzerlegung $A = U|A|$ kommutieren, d.h. wenn $U|A| = |A|U$ gilt.
- (b) In der Vorlesung wurde die Singulärwertzerlegung von A aus seiner Polarzerlegung hergeleitet. Zeigen Sie, dass man umgekehrt die Polarzerlegung von A auch aus der Singulärwertzerlegung von A gewinnen kann.

Aufgabe 6) (Invertierbare Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) (4 Punkte)

Zeigen Sie:

- (a) Für $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $\|A\| < 1$ ist $I - A$ invertierbar mit

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k = I + A + A^2 + \dots,$$

wobei die rechte Seite eine in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ konvergente Reihe darstellt (d.h. die Partialsummen der Reihe konvergieren). Hierbei bezeichnet I die Identität auf $\mathcal{H}$.

Tipp: Man zeige, dass die Partialsummen der Reihe eine Cauchyfolge in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ bilden.

- (b) Die Menge $\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : A \text{ ist invertierbar}\}$ ist eine offene und dichte Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Tipp: Für die Offenheit verwende man z.B. Teil (a) und für die Dichtheit eine Schurzerlegung.

- (c) Die Menge $\mathcal{U} := \{A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : A \text{ ist unitär}\}$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Bemerkung: Beide Mengen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{U}$ bilden sogar Gruppen bzgl. der Komposition von Abbildungen. Im Falle von $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ nennt man diese die *allgemeine lineare Gruppe* (und schreibt $\mathrm{GL}(n)$ statt $\mathcal{G}$) bzw. die *unitäre Gruppe* ($\mathrm{U}(n)$ statt $\mathcal{U}$).

Aufgabe 7) (Die Matrixexponentialfunktion; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie:

- (a) Die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

konvergiert in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, und es gilt $\exp(A)^* = \exp(A^*)$.

- (b) Es gilt $\exp(A) = \lim_{l \rightarrow \infty} (I + \frac{A}{l})^l$ als Grenzwert in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Tipp: Man vergleiche $(I + \frac{A}{l})^l$ mit den Partialsummen.

- (c) Für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $AB = BA$ gilt

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

Insbesondere ist $\exp(A)$ invertierbar mit $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$.

Tipp: Cauchyprodukt und Binomischer Lehrsatz wie im Eindimensionalen.

- (d) Ist A normal, so stimmt die obige Definition von $\exp(A)$ mit der Definition gemäß des Spektralsatzes überein.

Aufgabe 8) (Blockmatrizen) (4 Punkte)

- (a) Seien $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass die Blockmatrix $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ einen invertierbaren Operator auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ darstellt und verifizieren Sie die Identität

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}.$$

Folgern Sie daraus, dass AB und BA dieselben Eigenwerte haben.

- (b) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine Kontraktion. Zeigen Sie, dass $A^*(I - AA^*)^{1/2} = (I - A^*A)^{1/2}A^*$ gilt, und benutzen Sie dies um zu zeigen, dass

$$U = \begin{pmatrix} A & (I - AA^*)^{1/2} \\ (I - A^*A)^{1/2} & -A^* \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} A & -(I - AA^*)^{1/2} \\ (I - A^*A)^{1/2} & A^* \end{pmatrix}$$

unitäre Operatoren auf $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ sind.

Tipp: Polarzerlegung.

Bemerkung: Man nennt U und V *unitäre Dilationen* von A .