Dr. Albrecht Seelmann

Dr. Michela Egidi

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Matrixanalysis

im Sommersemester 2019

Aufgabe 1) (Biorthogonale Tupel) (4 Punkte)

Sei $X = (x_1, \dots, x_k)$ ein k-Tupel über dem endlich dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$ aus linear unabhängigen Vektoren. Zeigen Sie, dass es ein k-Tupel $Y = (y_1, \dots, y_k)$ über $\mathcal{H}$ gibt, welches *biorthogonal* zu X ist, d.h. welches $\langle y_j, x_l\rangle = \delta_{j,l}$ für alle $j, l = 1, ..., k$ erfüllt. Zeigen Sie ferner, dass Y im Falle von $k = \dim \mathcal{H}$ eindeutig bestimmt ist.

Aufgabe 2) (Eine Ungleichung für die Determinante) (4 Punkte)

Sei $X = (x_1, \dots, x_n)$ ein n-Tupel über $\mathbb{K}^n$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$|\det(X)| \leq \prod_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

gilt, wobei Gleichheit genau dann auftritt, wenn die Spalten x_j paarweise orthogonal aufeinander stehen oder mindestens ein x_j der Nullvektor ist.

Tipp: QR-Zerlegung.

Aufgabe 3) (Simultane Schurzerlegung; Bonusaufgabe) (4 Punkte)

Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $(A_\alpha)_\alpha$ eine Familie von paarweise kommutierenden Operatoren $A_\alpha \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt einen unitären Operator Q derart, dass $Q^*A_\alpha Q$ für alle α eine obere Dreiecksmatrix ist.

(b) Sind alle A_α zusätzlich normal, so gibt es einen unitären Operator Q derart, dass $Q^*A_\alpha Q$ für alle α eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4) (Die Operatornorm und der adjungierte Operator) (4 Punkte)

Sei $\mathcal{H}$ ein endlich dimensionaler Hilbertraum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ist definiert durch

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|, \quad A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Sei nun $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften:

(a) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1=\|y\|} |\langle y, Ax\rangle|$.

(b) $(A^*)^* = A$ und $(AB)^* = B^*A^*$ für $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

(c) $\|A\| = \|A^*\| = \|A^*A\|^{1/2} = \|AA^*\|^{1/2}$.

(d) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und A normal, so gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle x, Ax\rangle| = \max\{|\lambda| \colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

Abgabe bis Dienstag, den 9. April 2019, um 14 Uhr in den Übungskasten.