

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

Testat zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Name: _____ Nummer der Übungsgruppe: _____

Matrikelnummer: _____

Erreichte Punkte: _____ / 36 Punkte

Verwenden Sie einen blauen oder schwarzen Stift. Als Hilfsmittel ist nur ein beidseitig beschriebenes Din A4 Blatt erlaubt. Alle Schritte sind zumindest stichpunktartig zu begründen. Das Testat gilt **ab 14 erreichten Punkten** als bestanden.

Aufgabe 1) (3 Punkte)

Seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar mit $B \subset A$, und seien $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ messbare Funktionen. Schließlich sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} g(x), & x \in B, \\ h(x), & x \in A \setminus B. \end{cases}$$

Zeigen Sie **anhand der Definition**, dass f ebenfalls messbar ist.

Aufgabe 2) (4 Punkte)

Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$, und sei $g \in L^q(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} fg \, d\mu \in \mathbb{C}$$

linear und stetig ist.

Aufgabe 3) (4 Punkte)

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-|x|}}{1+(tx)^2} \, dx$, $t \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob f stetig ist.

Aufgabe 4) (5 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $M := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x - y < 1, 1 < x + y < 3\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_M \frac{x - y}{x + y} \, d(x, y)$$

mit Hilfe der Transformationsformel.

Aufgabe 5) (6 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $D := \{(x, y, z)^T \mid x^2 + y^2 < 1, 0 < z < \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}$. Berechnen Sie das Lebesgue-Maß $\mu_3(D)$ von D .

bitte wenden

Aufgabe 6) (3+3=6 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ gegeben durch $M := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 = y^2 + z^2 + 1\}$.

- (a) Zeigen Sie, dass M eine $\mathcal{C}^\infty$ -Mannigfaltigkeit ist. Welche Dimension hat sie?
- (b) Bestimmen Sie für jeden Punkt $p \in M$ eine Basis des Tangentialraums $T_p M$, und geben Sie ein stetiges Normalenvektorfeld $\nu: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 7) (2+3+3=8 Punkte)

Wir betrachten die 1-Form $\omega = x_2^2 x_3 \, dx_1 - x_1 x_3 \, dx_2 + (2x_1 + 1) \, dx_3$ im $\mathbb{R}^3$.

- (a) Stellen Sie $d\omega$ in der Basis $dx_1 \wedge dx_2$, $dx_2 \wedge dx_3$, $dx_1 \wedge dx_3$ dar.
- (b) Sei $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Phi(r, s, t) = (-s, t, r)^T$. Berechnen Sie

$$(\Phi^* \omega)(r, s, t)(v)$$

für $(r, s, t)^T = (1, -2, 2)^T$ und $v = (1, 1, 0)^T$.

- (c) Sei $\Psi: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $\Psi(t) = (t, 2, 1)^T$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\Psi((0,1))} \omega.$$