Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 27) (Rotationskörper)

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Es bezeichne $V_f \subset \mathbb{R}^3$ die Menge, die durch Rotation des Subgraphen

$$\Gamma_f = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (1, \infty), y = 0, 0 < z < f(x)\}$$

um die x -Achse entsteht. Ferner bezeichne $M_f = \partial V_f \setminus (\{1\} \times \mathbb{R}^2)$ die zugehörige Mantelfläche, vgl. Vortrag 18 von Blatt 9.

- (a) Bestimmen Sie ein Einheitsnormalenvektorfeld ν auf M_f . Zeigen Sie ferner, dass V_f endliches Volumen hat, wenn das Integral

$$\int_{M_f} \det(\nu, \cdot, \cdot)$$

einen endlichen Wert hat.

Bemerkung: Das obige Integral kann als (orientierter) Flächeninhalt der Mantelfläche M_f interpretiert werden. Damit hat der oben beschriebene Rotationskörper V_f also endliches Volumen, wenn seine Oberfläche endlich ist.

- (b) Sei speziell $f(x) = 1/x$ für $x > 1$. Zeigen Sie, dass V_f endliches Volumen hat, aber das Integral aus (a) keinen endlichen Wert hat.

Aufgabe 28) (Die Gramsche Determinante)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d . Für eine lokale Parametrisierung $\psi: U \rightarrow M$ von M heißt die Funktion $g_\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_\psi(q) := \det((D\psi(q))^T D\psi(q)) = \det((\langle \partial_j \psi(q), \partial_k \psi(q) \rangle)_{j,k})$$

die zu ψ gehörige *Gramsche Determinante*.

- (a) Zeigen Sie im Fall $n = 3$ und $d = 2$, dass $g_\psi(q) = \|\partial_1 \psi(q) \times \partial_2 \psi(q)\|^2$ gilt.
- (b) (Graphenflächen) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung. Sei ferner $M := \{(q, f(q))^T \mid q \in U\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ die zugehörige Graphenfläche mit globaler Parametrisierung $\psi: U \rightarrow M$, $\psi(q) = (q, f(q))^T$. Zeigen Sie:

$$g_\psi(q) = 1 + \|\nabla f(q)\|^2.$$

Tipp: Man zeige zunächst $\det(E_k + uu^T) = 1 + u^T u$ für $u \in \mathbb{R}^k$ mit der $k \times k$ -Einheitsmatrix E_k . Dazu schreibe man

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ u^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k + uu^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -u^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & u \\ 0 & 1 + u^T u \end{pmatrix}.$$

- (c) (Rotationsflächen) Sei M_f die Mantelfläche aus Aufgabe 27a). Bestimmen Sie die Gramsche Determinante zu einer von Ihnen gewählten lokalen Parametrisierung von M_f .

Bemerkung: Die Gramsche Determinante spielt eine zentrale Rolle bei der Integration auf Mannigfaltigkeiten.

bitte wenden

Vortragsthemen für die Übungen am 30. bzw. 31. Januar 2019:

Vortrag 27) (Satz von Stokes für Quader)

Sei $Q = [0, 1]^3$ und $\omega = \frac{x_1^2 x_2^3}{1+x_3^2} dx_1 \wedge dx_3$. Verifizieren Sie die Aussage

$$\int_Q d\omega = \int_{\partial Q} \omega$$

aus dem Satz von Stokes für Quader durch explizite Berechnung beider Seiten der Gleichung.

Vortrag 28) (Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten)

Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln aus Lemma 13.4 des Skriptes für das Differential von Formen auf Mannigfaltigkeiten:

1. $d(\omega + \omega') = d\omega + d\omega'$.
2. $d(\omega \wedge \psi) = (d\omega) \wedge \psi + (-1)^p \omega \wedge (d\psi)$, wenn ω eine p -Form ist.
3. $\Phi^*(d\omega) = d\Phi^*\omega$ für eine C^k -Abbildung $\Phi: M \rightarrow N$ von Mannigfaltigkeiten und eine C^l - p -Form ω auf N .