Theoretische Physik I — WiSe 2018/19
11. Übungsblatt

Ausgabe: 15.01.2019 — Ute Löw
Abgabe: 23.01.2019, 12 Uhr

Aufgabe 28: Der fallende Ring — 10 Punkte

Ein metallischer Ring mit der Masse m, der Fläche A und dem Widerstand R falle unter dem Einfluss der Schwerkraft mit der Beschleunigung $\vec{a} = -g \cdot \vec{e}_z$ durch ein inhomogenes Magnetfeld $\vec{B}(\vec{r}) = \beta\, z\, \vec{e}_x$. Nehmen Sie im Folgenden an, dass der Ring senkrecht zur x-Achse steht und sich nur in z-Richtung bewegen kann.

a) Skizzieren sie das System. *(1 Punkt)*

b) Erläutern Sie, welchen Einfluss das inhomogene Magnetfeld auf den Metallring hat. Erklären Sie kurz, unter welchen Voraussetzungen $\vec{B}_{\text{ges}} \approx \vec{B}_{\text{ext}}$ angenommen werden kann? *(2 Punkte)*

c) Berechnen Sie die induzierte Spannung und stellen Sie eine Energieerhaltungsgleichung für das System auf. *(3 Punkte)*

d) Bestimmen Sie durch Differenzieren der Energieerhaltungsgleichung die Bewegungsgleichung des Ringschwerpunkts. *(2 Punkte)*

e) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Startbedingung $\dot{z}(0) = 0$. Berechnen Sie ebenfalls $\dot{z}(t)$ für den Grenzfall $t \to \infty$. *(2 Punkte)*

Aufgabe 29: Polarisation — 5 Punkte

Betrachten Sie das elektrische Feld $\vec{E} = E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y$ mit

$$E_x = |\hat{E}_x| \cos(kz - \omega t + \phi)\,, \qquad E_y = |\hat{E}_y| \cos(kz - \omega t + \phi + \delta) \tag{1}$$

und der relativen Phase δ. Untersuchen Sie die folgenden beiden Fälle an einem fixierten Raumpunkt:

1. $\delta \in \{-\pi, 0, \pi\}$,
2. $\delta \in \{-\pi/2, \pi/2\}; |\hat{E}_x| = |\hat{E}_y|$,

indem Sie

a) die Polarisationsrichtungen beschreiben.
Was erwarten Sie im zweiten Fall für $|\hat{E}_x| \neq |\hat{E}_y|$?

b) die assoziierten Magnetfelder berechnen.

Aufgabe 30: δ-Distribution — 5 Punkte

1. Beweisen Sie die wichtige Relation

$$\delta(f(x)) = \sum_i^N \frac{\delta(x - x_i)}{|f'(x_i)|}\,, \tag{2}$$

die Sie in der Vorlesung kennengelernt haben. Hierbei entspricht x_i der i-ten Nullstelle der Funktion $f(x)$.

2. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a)
$$\int_0^{\infty} \delta(2x)(x^2 + 5x)\mathrm{d}x \tag{3}$$

   (b)
$$\int_0^{2\pi} \delta(\cos(x))\sin(x)\mathrm{d}x \tag{4}$$

3. Machen Sie sich klar, dass die dreidimensionale Delta-Distribution $\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)$ mit

$$\int_V \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_0)\mathrm{d}V = 1 \tag{5}$$

   in kartesischen Koordinaten
   $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)$ entspricht. Wie muss der Ausdruck in Kugelkoordinaten abgeändert werden?

4. Gegeben sei ein Kreisdraht mit Radius R in der $x - y$-Ebene der die Gesamtladung Q trägt und dessen Zentrum im Koordinatenursprung liegt. Drücken Sie die Ladungsverteilung durch geeignete Delta-Distributionen und die Längen-Ladungsdichte

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi R} \tag{6}$$

   aus.