Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

13. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 25) (Das Tangentialbündel)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension d. Das *Tangentialbündel* TM von M ist definiert durch

$$TM := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_pM \subset \mathbb{R}^{2n}\,.$$

Zeigen Sie, dass TM eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Mannigfaltigkeit der Dimension $2d$ ist.

Tipp: Man konstruiere aus Karten von M entsprechende Karten von TM.

Bemerkung: Ebenso kann man zeigen, dass das *Kotangentialbündel*

$$T^*M := \bigcup_{p\in M} \{p\} \times T_p^*M$$

eine $\mathcal{C}^{k-1}$-Mannigfaltigkeit der Dimension $2d$ ist.

Aufgabe 26) (Zurückziehen von Differentialformen)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi\colon U \to V$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\Phi^*(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n) = (\det D\Phi)\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Führen Sie den Beweis dieser Aussage aus dem Skript (Lemma 12.11) aus mit einer ausführlichen Begründung der einzelnen Schritte. Erstellen Sie eine Liste der verwendeten Objekte und geben Sie an, wo diese definiert sind.

bitte wenden

Vortragsthemen für die Übungen am 23. bzw. 24. Januar 2019:

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\omega = f \, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ eine n-Form auf U. Ist f über U Lebesgue-integrierbar, so setzen wir

$$\int_U \omega := \int_U f \, \mathrm{d}\mu \, .$$

Vortrag 25) (Integrale über Differentialformen)

(a) Sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)^T$, und sei $\gamma \colon (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{(0,2\pi)} \gamma^*(\langle f, \cdot \rangle) \, .$$

(b) Sei $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ wie in Vortrag 24 und ν ein Einheitsnormalenvektorfeld an $M := g(\mathbb{R}^2)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{(-\pi,\pi)\times(0,2\pi)} g^*(\det(\nu, \cdot, \cdot)) \, .$$

Vortrag 26) (Graphenflächen)

Sei $M := \{(x, y, x^2) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (0, 1/2), y \in (0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass M eine $\mathcal{C}^\infty$-Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist. Bestimmen Sie ferner eine (globale) Parametrisierung $\psi \colon U \to M$ von M und ein Einheitsnormalenvektorfeld ν an M. Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_U \psi^*(\det(\nu, \cdot, \cdot)).$$