Theoretische Physik I — WiSe 2018/19
10. Übungsblatt

Ausgabe: 08.01.2019 — Ute Löw
Abgabe: 16.01.2019, 12 Uhr

Aufgabe 26: Die Reynoldszahl — 10 Punkte

Im allgemeinen sind Reynoldszahlen sehr schwer zu bestimmen. In der folgenden Aufgabe werden deshalb die Reynoldszahlen eines Rohrs mit endlicher Länge l approximatov bestimmt, in dem eine Flüssigkeit mit konstanter Dichte ρ strömt. Gehen Sie davon aus, dass die Trägheitskräfte in der Navier-Stokes Gleichung mit

$$\rho\left(v\nabla\cdot v\right)\approx\rho\frac{v^2}{l}$$

gegeben sind. Die viskosen Kräfte seien durch

$$\eta\Delta v\approx\eta\frac{v}{l^2},$$

anzunehmen, wobei v jeweils eine Geschwindigkeit beschreibt. Die Reynoldszahl ist definiert als das Verhältnis von Trägheitskräften und viskosen Kräften und bestimmt mit

$$\frac{\rho\left(v\nabla v\right)}{\eta\Delta v}\approx\frac{\rho v^2 l^2}{\eta v l}=\frac{\rho v l}{\eta}=:\mathrm{Re}.$$

a) Berechnen Sie die Reynoldszahl für die Fälle eines Rohres der Länge

- $l = 1$ cm
- $l = 10$ cm
- $l = 1$ m

bei einer Geschwindigkeit von Wasser von $v = 0.04\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ und einer Viskosität $\eta = 8.9\cdot 10^{-4}\ \mathrm{Pa\,s}$.

b) Bei einer Reynoldszahl von etwa $\mathrm{Re}\approx 2300$ ist das System turbulent. Für welche der oben berechneten Fälle trifft dies zu? Was bedeutet das für die Strömung in einem Rohr?

c) Leiten Sie eine vereinfachte Navier-Stokes Gleichung für den Fall kleiner Reynoldszahlen her. Was ist die Konsequenz kleiner Reynoldszahlen für das System?

d) Für den zuvor behandelten Fall ist die Trägheit im Grenzfall kleiner Reynoldszahlen vernachlässigbar gegenüber den viskosen Kräften. Die Reibung auf einen Körper in der Flüssigkeit sei als Stokes'sche Reibung mit

$$F=-kv=-6\pi R\eta v$$

anzunehmen. Dabei ist R der Radius des Körpers. Leiten Sie eine Gleichung für die Entwicklung der Geschwindigkeit mit der Zeit her.

Präsenzaufgabe in der Übung: Was bedeutet diese Geschwindigkeitsentwicklung für die zurückgelegte Strecke? Bsp.: Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 100\ \mathrm{\mu m\,s^{-1}}$, $\tau = 0.25\ \mathrm{\mu s}$

Aufgabe 27: Levi-Civitas Fingerübungen 10 Punkte

Das Levi-Civita-Symbol ε_{ijk} (oft auch Levi-Civita-Tensor genannt) ist durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ falls } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ -1, \text{ falls } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \text{ ist,} \\ \;\;0, \text{ falls mindestens zwei Indizes gleich sind.} \end{cases} \tag{1}$$

definiert. Ein Tensor kann als Verallgemeinerung einer Matrix mit beliebiger Anzahl von Indizes angesehen werden. Die Einträge dieses Tensors werden durch i, j, k indiziert, sodass es insgesamt $3^3 = 3 \cdot 9 = 27$ Einträge gibt, da die Indizes die Werte 1,2 oder 3 annehmen können.
Eine gerade (ungerade) Permutation ist dadurch definiert, dass sich die Kombination der Zahlen durch eine gerade (ungerade) Anzahl an Vertauschungen jeweils zweier Zahlen erreichen lässt.
Beispiel: (1,3,2) ist eine ungerade Permutation von (1,2,3), weil die sich die Reihenfolge (1,2,3) durch einmaliges Vertauschen der letzten beiden Zahlen von (1,3,2) erreichen lässt.
Aufgrund dieser Eigenschaften wird ε_{ijk} auch total antisymmetrischer Tensor genannt.

a) Machen Sie sich klar, welche Einträge des Tensors gleich Null sind und schreiben Sie alle von Null verschiedenen Elemente mit der richtigen Zuordnung von $+1$ und -1 auf.

Zeigen Sie:
b) $\varepsilon_{ijk} = \vec{e_i} \cdot (\vec{e_j} \times \vec{e_k})$.

c) $\det(A) = \sum\limits_{i,j,k}^{3} \varepsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k}$, wobei A eine 3x3-Matrix ist.

d) $\sum\limits_{i,j}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}$

e) Für die i-te Komponente von $\vec{a} \times \vec{b}$ gilt $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum\limits_{j,k}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$.

Anmerkungen: Mit $\vec{e}_i$, $\vec{e}_j$ und $\vec{e}_k$ seien die kanonischen Einheitsvektoren des euklidischen dreidimensionalen Raumes bezeichnet. Summen über Indizes sind in dieser Aufgabe so zu verstehen, dass über alle möglichen Kombinationen der Indizes summiert wird.