

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 23) (Diffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d und $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass dann $g(M)$ ebenfalls eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d ist.

Aufgabe 24) (Das Möbiusband)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(1 + r \cos(\frac{\varphi}{2})) \\ \sin(\varphi)(1 + r \cos(\frac{\varphi}{2})) \\ r \sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist dann gegeben durch

$$M := \left\{ f(r, \varphi) \mid r \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Zeigen Sie durch Angabe von lokalen Parametrisierungen, dass M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist. Begründen Sie insbesondere die Stetigkeit der jeweiligen Inversen!
- Sei $\tilde{M} := f(\{0\} \times (0, 2\pi)) \subset M$. Bestimmen Sie eine von $p \in \tilde{M}$ abhängige Basis $(e_1^{(p)}, e_2^{(p)})$ des Tangentialraums $T_p(M)$.
- Durch

$$\nu: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3, \nu(p) := \frac{e_1^{(p)} \times e_2^{(p)}}{|e_1^{(p)} \times e_2^{(p)}|}$$

ist in jedem Punkt $p \in \tilde{M}$ ein auf $T_p(M)$ senkrechter Vektor gegeben.

Zeigen Sie, dass ν nicht zu einem stetigen Einheitsnormalenvektorfeld von M im Sinne von Definition 12.19 des Skriptes fortgesetzt werden kann.

- Folgern Sie aus (c) noch einmal, dass M nicht orientierbar ist. Verwenden Sie hierfür, dass es in einer orientierbaren Mannigfaltigkeit ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld gibt, vgl. Satz 12.23 des Skriptes.

Vortragsthemen für die Übungen am 16. bzw. 17. Januar 2019:

Vortrag 23) (Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten)

- (a) Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln aus Lemma 12.2 des Skriptes für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten:

i) $\Phi^*(\omega + \omega') = \Phi^*\omega + \Phi^*\omega'.$

iii) $\Psi^*\Phi^*\omega = (\Phi \circ \Psi)^*\omega.$

- (b) Sei ω eine $\mathcal{C}^l$ - p -Form einer $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d und $\varphi: U \rightarrow U'$ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte von M . Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Darstellung

$$\omega|_U = \sum_{|I|=p} \omega_I d\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge d\varphi_{i_p},$$

mit $\mathcal{C}^l$ -Funktionen $\omega_I: U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, wobei $I \subset \{1, \dots, d\}$ aufsteigend geordnet ist und φ_j die j -te Komponente von φ bezeichnet.

Vortrag 24) (Normaleneinheitsfelder)

Sei $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$g(\varphi, \theta) := \begin{pmatrix} (2 + \cos(\theta)) \cos(\varphi) \\ (2 + \cos(\theta)) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

und sei $M := g(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$.

- (a) Zeigen Sie, dass M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.
- (b) Bestimmen Sie für jeden Punkt $p \in M$ eine Basis des Tangentialraums, und geben Sie ein Einheitsnormalenvektorfeld (vgl. Definition 12.19 des Skriptes) an.