technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

11. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 21) (Rechnen mit Differentialformen)

(a) Sei $\omega_1 = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$, $\omega_2 = x_1 \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2$ und $\omega_3 = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}r^2$ mit $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Seien ferner $p = (2,0,0)^T$, $\xi = (1,1,1)^T$ und $\eta = (1,2,3)^T$. Berechnen Sie

$$\omega_j(p)(\xi, \eta)$$

für $j = 1,2,3$.

(b) Sei $\omega_1 = 2x_1^2 \mathrm{d}x_1 + (x_1 + x_2)\mathrm{d}x_2$ und $\omega_2 = x_1^3 \mathrm{d}x_1 + x_2 x_3 \mathrm{d}x_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\mathrm{d}x_3$. Berechnen Sie die äußeren Ableitungen $\mathrm{d}\omega_1$, $\mathrm{d}\omega_2$ und $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2)$ und verifizieren Sie so die Identität $\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) = (\mathrm{d}\omega_1) \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge (\mathrm{d}\omega_2)$.

Aufgabe 22) (Geschlossene und exakte Differentialformen)

(a) Untersuchen Sie, ob die 1-Form $\mathrm{d}x_1 + 2x_2 \mathrm{d}x_2 + 3x_3^2 \mathrm{d}x_3$ exakt ist.

(b) Finden Sie für die 3-Form $\omega = 12 x_1^2 x_2^3 x_3^4 \,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ eine 2-Form ϕ mit $\omega = \mathrm{d}\phi$.

(c) Finden Sie eine 1-Form ϕ mit $\mathrm{d}\phi = x_3 \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

bitte wenden

Vortragsthemen für die Übungen am 9. bzw. 10. Januar 2019:

Vortrag 21) (Darstellung von Differentialformen)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $X: U \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^l$-Vektorfeld.

(a) Stellen Sie die 1-Form $\omega := \langle X, \cdot \rangle$ bezüglich der Basis $\mathrm{d}x_j$, $j = 1, \ldots, n$, dar, und berechnen Sie die äußere Ableitung $\mathrm{d}\omega$. Zeigen Sie außerdem, dass die Zuordnung $\mathcal{C}^l(U; \mathbb{R}^n) \ni X \mapsto \langle X, \cdot \rangle \in \mathcal{C}^l(U; \Lambda^1(\mathbb{R}^n)^*)$ bijektiv ist.

(b) Stellen Sie die $(n-1)$-Form $\omega := \det(X, \cdot, \ldots, \cdot)$ bzgl. der durch $\mathrm{d}x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{j_{n-1}}$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_{n-1} \leq n$ gegebenen Basis dar, und berechnen Sie $\mathrm{d}\omega$. Zeigen Sie außerdem, dass die Zuordnung $\mathcal{C}^l(U; \mathbb{R}^n) \ni X \mapsto \det(X, \cdot, \ldots, \cdot) \in \mathcal{C}^l(U; \Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)^*)$ bijektiv ist.

Vortrag 22) (Zurückziehen von Differentialformen)

(a) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\gamma: (a,b) \to U$ eine $\mathcal{C}^1$-Abbildung und $X: U \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$\gamma^*(\langle X, \cdot \rangle) = \langle X \circ \gamma, \gamma' \rangle \, \mathrm{d}t \,,$$

wobei $\mathrm{d}t$ die kanonische 1-Form auf $\mathbb{R}$ bezeichnet.

(b) Seien $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\psi: U \to \mathbb{R}^3$ eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung und $X \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$-Vektorfeld. Zeigen Sie, dass

$$\psi^*(\det(X, \cdot, \cdot)) = \langle X \circ \psi, \partial_1 \psi \times \partial_2 \psi \rangle \, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \,.$$

Frohe Weihnachten und ein glückliches neues Jahr

Abgabe bis Montag, den 7. Januar 2019, um 14 Uhr in die Übungskästen.