technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

10. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 19) (Lokale Parametrisierungen)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension d, $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\psi\colon U \to M$ eine injektive $\mathcal{C}^k$-Abbildung derart, dass $D\psi(x)$ hat für alle $x \in U$ Rang d hat.

(a) Zeigen Sie, dass $\psi(U) = S \cap M$ für eine offene Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ gilt und $\psi^{-1}\colon \psi(U) \to U$ stetig ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\psi(U)$ offen in M ist. Hierfür können das Begradigungslemma und der lokale Umkehrsatz aus Analysis II hilfreich sein.

Bemerkung: Damit ist ψ^{-1} eine Karte von M und ψ entsprechend eine lokale Parametrisierung von M.

(b) Muss $\psi^{-1}\colon \psi(U) \to U$ noch stetig sein, wenn auf die Voraussetzung verzichtet wird, dass M eine Mannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 20) (Antisymmetrische Bilinearformen)

Für $\nu \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ sei $E_\nu := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u\cdot\nu = 0\}$ die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^3$, die senkrecht auf ν stehen. Ferner sei $\Pi_\nu\colon \mathbb{R}^3 \to E_\nu$ mit $\Pi_\nu(u) = u - (u\cdot\nu/|\nu|)\nu/|\nu|$ die orthogonale Projektion auf E_ν. Hierbei stehen $\cdot$ und $|\cdot|$ für das euklidische Skalarprodukt und die zugehörige Norm in $\mathbb{R}^3$.
Wir definieren nun die alternierende 2-Form $B_\nu\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$B_\nu(u, w) := \det(\nu, \Pi_\nu(u), \Pi_\nu(w)).$$

(a) Veranschaulichen Sie $|B_\nu(u, w)|$ als Volumen einer geeigneten Menge $P \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$B_\nu(u, w) = \det(\nu, u, w) \quad \text{für alle} \quad u, w \in \mathbb{R}^3\,.$$

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $A_\nu \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit

$$B_\nu(u, w) = u \cdot (A_\nu w) \quad \text{für alle} \quad u, w \in \mathbb{R}^3\,.$$

(d) Verifizieren Sie, dass $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 = B_{e_3}$, $\epsilon_1 \wedge \epsilon_3 = -B_{e_2}$ und $\epsilon_2 \wedge \epsilon_3 = B_{e_1}$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnen. Stellen Sie damit B_ν als Linearkombination der Formen $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2$, $\epsilon_1 \wedge \epsilon_3$ und $\epsilon_2 \wedge \epsilon_3$ dar.

(e) Schreiben Sie B_ν in der Form $B_\nu = \omega_1 \wedge \omega_2$ mit 1-Formen ω_1 und ω_2.

bitte wenden

Vortragsthemen für die Übungen am 19. bzw. 20. Dezember 2018:

Vortrag 19) (Diffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten)

Sei $M := \{(x, y, z)^T \mid x^2/4+y^2+z^2 = 1\}$. Finden Sie einen Diffeomorphismus $f\colon S^2 \to M$ und bestimmen Sie T_pf im Punkt $p = (1/2, 1/2, \sqrt{2}/2)^T$, d.h. geben Sie $T_pf\colon T_p(S^2) \to T_{f(p)}M$ explizit bezüglich von Ihnen gewählten Basen an.

Vortrag 20) (Zur äußeren Algebra)

Sei V ein K-Vektorraum endlicher Dimension. Zeigen Sie: $\psi_1, \dots, \psi_p \in V^*$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\psi_1 \wedge \cdots \wedge \psi_p = 0$.

Abgabe bis Montag, den 17. Dezember 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.