Theoretische Physik I — WiSe 2018/19
7. Übungsblatt

Ausgabe: 04.12.2018 — Ute Löw
Abgabe: 12.12.2018, 12 Uhr

Aufgabe 18: Verständnisfragen — 5 Punkte

1. Wie unterscheiden sich Lagrange- und Hamiltonformalismus? Auf welche Art sind sie mathematisch miteinander verbunden?
2. Was sind Erhaltungsgrößen? Wie können Sie ausgehend von der Lagrange- bzw. Hamiltonfunktion eines Systems dessen Erhaltungsgrößen bestimmen?
3. Welche Bedingungen müssen bei der Einführung generalisierter Koordinaten beachtet werden?
4. Warum werden Reibungskräfte nicht zu Zwangsbedingungen gezählt?
5. Aus welchem Prinzip folgen der Lagrange- und Hamiltonformalismus? Können Sie Beispiele aus dem Alltag nennen die darauf beruhen?

Aufgabe 19: Billard — 5 Punkte

Auf einem rechteckigen Billardtisch mit einer kurzen Kante der Länge a und einer langen Kante der Länge $L \gg a$ befindet sich eine Kugel, die reibungsfrei rollt und elastisch mit der Bande stößt. Die Kugel befindet sich mittig und $\frac{3}{4}L$ von der rechten kurzen Bande entfernt und werde 45° in Richtung der kurzen Bande angestoßen.

1. Skizzieren Sie dieses Problem und die Bahn der Kugel.
2. Was passiert, wenn die Kugel um ein Stück Δx in Richtung der kurzen Kante verschoben wird? Skizzieren Sie die Bahn der Kugel mit 2 weiteren Anfangspunkten.

Nun wird die kurze Kante durch einen Halbkreis mit Radius $a/2$ ersetzt.

3. Wiederholen Sie die letzten zwei Teilaufgaben.
4. Erklären Sie in diesem Zusammenhang den Begriff des deterministischen Chaos.

Aufgabe 20: Lyapunov — 10 Punkte

Ausgehend von der Hamiltonfunktion $H(q_i, p_i)$ ergibt sich über die kanonischen Bewegungsgleichungen eine Lösungsfunktion

$$\vec{z} = (q_1 \dots q_f, p_1 \dots p_f)^{\mathrm{T}}, \tag{1}$$

wobei f die Anzahl an generalisierten Koordinaten ist. Deren zeitliche Änderung wird definiert als

$$\frac{\mathrm{d}\vec{z}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{z}). \tag{2}$$

Mit einer kleinen Änderung der Lösung $\vec{z} \to \vec{z} + \Delta\vec{z}$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}(\vec{z} + \Delta\vec{z})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}(\vec{z} + \Delta\vec{z}) \tag{3}$$

und damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\vec{z}) = \vec{F}(\vec{z} + \Delta\vec{z}) - \vec{F}(\vec{z}). \tag{4}$$

Diese kann durch Entwicklung in erster Ordnung über die Einführung einer Matrix $\underline{\underline{M}}$ linearisiert werden:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta\vec{z}) = \underline{\underline{M}} \cdot \Delta\vec{z} + \mathcal{O}(\Delta\vec{z}^2) \quad \text{mit} \quad \left(\underline{\underline{M}}\right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial\, z_j} \tag{5}$$

Die sogenannten Lyapunov-Exponenten λ_i sind die Eigenwerte der Matrix $\underline{\underline{M}}$. Mit diesen kann auch bei nicht-integrablen Systemen eine Aussage darüber getroffen werden, ob das System sich regulär oder chaotisch verhält.

a) Wann verhält sich ein System mit gegebenen Lyapunov-Exponenten λ_i chaotisch? Wann verhält es sich regulär? (2 Punkte)

b) Berechnen Sie die Lyapunov-Exponenten λ_i für das System mit folgender Hamilton-Funktion:

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + A(x^2 + y^2) + \alpha(x^4 + y^4) + \delta x^2 y^2\,. \tag{6}$$

Die Konstanten A, α, δ sind Elemente der reelen Zahlen ohne Null.
Hinweise: Machen sie sich klar welches die generalisierten Koordinaten sind und starten Sie mit den kanonischen Bewegungsgleichungen. Gehen Sie dann von $\{q_i, p_i\}$ zu $\{\Delta q_i, \Delta p_i\}$ mit den gegeben Relationen über und diagonalisieren Sie das sich ergebende Differentialgleichungssystem. Die Bestimmung des charakteristischen Polynoms wird einfacher wenn lange Matrixeinträge mit a, b, c substituiert werden. (6 Punkte)

c) Wann ergeben sich rein imaginäre λ_i? Was bedeutet das für das System? (2 Punkte)