Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

9. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 17) (Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(i) $\int_E \sqrt{16x^2+9y^2}\,\mu(\mathrm{d}(x,y))$ mit $E := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/9 + y^2/16 < 1\}$.

(ii) $\int_F \mathrm{e}^{-(x^2+4y^2)}\,\mu(\mathrm{d}(x,y))$ mit $F := \{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2 < 1\}$.

(iii) $\int_G x^2\,\mu(\mathrm{d}(x,y,z))$ mit $G := \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 9x^2 + 4y^2 + z^2 < 36\}$.

Aufgabe 18) (Mannigfaltigkeiten)

Zeigen Sie die folgende Charakterisierung für Mannigfaltigkeiten: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension d, wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in W$ und eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $F\colon W \to \mathbb{R}^{n-d}$ gibt derart, dass

$$W \cap M = F^{-1}(\{0\})$$

gilt und $DF(p)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ Rang $n-d$ hat.

Vortragsthemen für die Übungen am 12. bzw. 13. Dezember 2018:

Vortrag 17) (Differenzierbare Abbildungen auf Mannigfaltigkeiten)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit und $f\colon M \to \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in W$ und eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung $F\colon W \to \mathbb{R}^m$ mit $F|_{W\cap M} = f|_{W\cap M}$.

(ii) Zu jedem Punkt $p \in M$ existiert eine in M offene Umgebung U von p und eine $\mathcal{C}^k$-Karte $\varphi\colon U \to U' \subset \mathbb{R}^d$ derart, dass $f \circ \varphi^{-1}\colon U' \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung ist.

(iii) Für jede $\mathcal{C}^k$-Karte $\varphi\colon U \to U'$ von M ist $f \circ \varphi^{-1}$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung.

Vortrag 18) (Rotationsflächen)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ eine $\mathcal{C}^k$-Abbildung. Wir betrachten die Menge $M_f \subset \mathbb{R}^3$, die durch Rotation des Graphen

$$\Gamma_f = \{(x,y,z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R},\ y = 0,\ z = f(x)\}$$

um die x-Achse entsteht.

(a) Finden Sie eine Funktion $F_f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $M_f = F_f^{-1}(\{0\})$, und zeigen Sie, dass M_f eine $\mathcal{C}^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist.

(b) Finden Sie für jeden Punkt $p \in M_f$ eine lokale Parametrisierung von M_f so, dass p im Bild der Parametrisierung liegt.