Theoretische Physik I — WiSe 2018/19
6. Übungsblatt

Ausgabe: 27.11.2018 — Ute Löw
Abgabe: 05.12.2018, 12 Uhr

Aufgabe 15: Legendre-Transformation — 4 Punkte

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{axy} \,. \tag{1}$$

a) Bilden Sie das totale Differential $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$.

b) Was ist die anschauliche Bedeutung von $\mathrm{d}f$?

c) Bestimmen Sie die Legendre-Transformierte $g(x, u) = uy - f$ von $f(x, y)$ mit $u = \frac{\partial f}{\partial y}$.
Denken Sie dabei daran, dass g eine Funktion von x und u ist.

d) Was ist der Bezug der Legendre-Transformation zur analytischen Mechanik?

Aufgabe 16: Der harmonische Oszillator im Hamilton-Formalismus — 9 Punkte

Im Folgenden sollen Sie anhand des (freien, ungedämpften, eindimensionalen) harmonischen Oszillators den Hamilton-Formalismus anwenden und kennenlernen. In dieser Aufgabe sei der harmonische Oszillator durch ein Federpendel mit Federkonstante k realisiert. In der Gleichgewichtslage sei $q = \dot{q} = 0$, wobei q die einzige Koordinate des harmonischen Oszillators ist.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion des harmonischen Oszillators an. Nutzen Sie dabei die Darstellung, in der die Kreisfrequenz $\omega^2 = \frac{k}{m}$ vorkommt. Bestimmen Sie nun die Hamiltonfunktion H des Systems in ihren natürlichen Variablen unter Verwendung der Legendre-Transformation.

b) Stellen Sie die Hamilton-Bewegungsgleichungen für das System auf und lösen Sie diese für allgemeine Anfangsbedingungen $q(t = 0) = q_0$ und $p(t = 0) = p_0$. Welche Form hat die Trajektorie des Systems im Phasenraum?

c) Zeigen Sie, dass die Phasenraumfunktion

$$f(p, q, t) = p \sin(\omega t) - m\omega q \cos(\omega t) \tag{2}$$

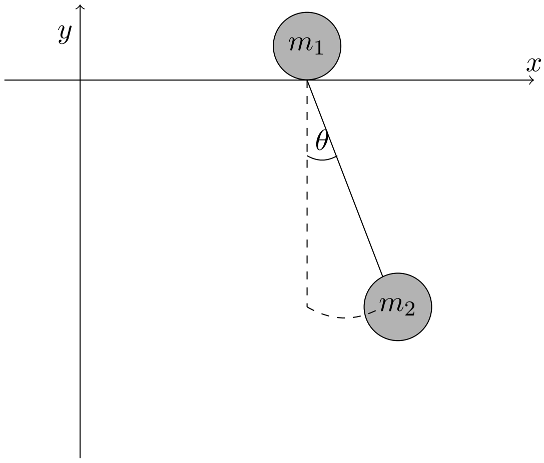
erhalten ist. Verwenden Sie dafür Poissonklammern. Bestätigen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie $\mathrm{d}f/\mathrm{d}t$ direkt berechnen!
Hinweis: Beachten Sie, dass die kanonischen Poissonklammern $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ sind. Überlegen Sie sich, wie das für den eindimensionalen Fall aussieht.

d) Sei nun ein allgemeines eindimensionales mechanisches System gegeben. Die Hamiltonfunktion sei erhalten. Zeigen Sie unter Verwendung von Poissonklammern, dass dann auch die partielle Zeitableitung einer erhaltenen Phasenraumfunktion $f(p, q, t)$ erhalten ist.
Bestätigen Sie diese Erkenntnis für die in c) angegebene Funktion. Das bedeutet, dass Sie explizit zeigen, dass $\partial f/\partial t$ erhalten ist. Dabei kann zum Beispiel analog zu der vorherigen Teilaufgabe vorgegangen werden, indem mit Poissonklammern gearbeitet wird.

e) *Präsenzaufgabe in der Übung: Zeigen Sie mit der Definition der Poissonklammer, dass für die kanonischen Poissonklammern* $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ *gilt.*

Aufgabe 17: Gleitpendel — 7 Punkte

Der Aufhängepunkt eines ebenen Pendels der Länge l und der Pendelmasse m_2 besitzt die Masse m_1 und kann sich reibungsfrei entlang der x-Achse bewegen.



a) Wie lauten die holonomen Zwangbedingungen? Welche unabhängigen Koordinaten bieten sich an?

b) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion als Funktion der gewählten unabhängigen Koordinaten und stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

c) Die zuvor bestimmten Bewegungsgleichungen sind nicht ohne Weiteres zu lösen. Linearisieren Sie die Gleichungen und bestimmen Sie die Schwingungsfrequenz für den Fall kleiner Auslenkungen der Masse m_2. Welche Näherung bietet sich hier an?