

Ausgabe: 20.11.2018

Ute Löw

Abgabe: 28.11.2018, 12 Uhr

Aufgabe 10: Durchhängende Hochspannungsleitung

8 Punkte

Eine Hochspannungsleitung wird unter Einfluss der Schwerkraft so geformt, dass die potentielle Energie minimal wird. Dabei sind die Aufhängepunkte der Leitung $(a, y(a))$ und $(b, y(b))$. Berechnen Sie die Form der durchhängenden Leitung. Die Länge der Leitung ist

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx = L. \quad (1)$$

Für die Länge gilt $L^2 \geq (b - a)^2 + (y^2(b) - y^2(a))$.

Berechnen Sie die Form der durchhängenden Leitung bei diesen Anfangsbedingungen.

Hinweis: Verwenden Sie, dass die Hamiltonfunktion konstant ist, d.h. es gilt

$$F(y, y') - y' \frac{\partial F(y, y')}{\partial y'} = C \quad (2)$$

wobei C eine Konstante ist.

Aufgabe 11: Zentralkraft im Hamilton-Formalismus

12 Punkte

Betrachten Sie die zweidimensionale Bewegung eines Körpers der Masse m in dem radialsymmetrischen Potenzial

$$V(r) = -V_0 \exp(-ar^2), \quad V_0 > 0, \quad a > 0. \quad (3)$$

a) Skizzieren Sie $V(r)$.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion L und daraus mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Bewegungsgleichungen des Systems auf. Verwenden Sie die ebenen Polarkoordinaten r und ϕ .

c) Berechnen Sie die zu den generalisierten Koordinaten gehörigen generalisierten Impulse. Welche Koordinate ist zyklisch und was stellt der zugehörige generalisierte Impuls dar?

d) Stellen Sie die Hamiltonfunktion $H = T + V(r)$ des Systems auf. T ist die kinetische Energie und $V(r)$ die potentielle Energie.

Hinweis: Die natürlichen Einheiten der Hamiltonfunktion sind die generalisierten Koordinaten und die generalisierten Impulse.

e) Verwenden Sie die Erhaltung des Drehimpulses um H auf die Form

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + V_{\text{eff}}(r) \quad (4)$$

zu bringen. Hierbei ist p_r der generalisierte Impuls der generalisierten Koordinate r .

f) Skizzieren Sie $V_{\text{eff}}(r)$. Betrachten Sie dabei zum einen den Fall, dass der Term der Drehimpulsbarriere dominiert (d.h. L ist sehr groß) und zum anderen den Fall, dass die Drehimpulsbarriere und die potentielle Energie $V(r)$ zu gleichen Teilen zum effektiven Potential beitragen.

g) *Präsenzaufgabe in der Übung: Zeigen Sie, dass es einen maximalen Drehimpuls L_{max} gibt, sodass die Bewegung für $L > L_{\text{max}}$ ungebunden ist.*