Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

7. Übungsblatt zur Vorlesung

# Analysis III

im Wintersemester 2018/19

## Aufgabe 13) (Cavalieri)

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar und $p = (p', h)^T \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1}$ mit $h > 0$ gegeben. Der Kegel $K(A)$ von $A$ sei nun definiert durch

$$K(A) := \{tp + (1-t)(a, 0)^T \mid a \in A,\ t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Wir nehmen an, dass $K(A)$ Lebesgue-messbar ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri, dass

$$\mu_{d+1}(K(A)) = \frac{h}{d+1}\mu_d(A),$$

wobei $\mu_d$ und $\mu_{d+1}$ das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^{d+1}$ bezeichnet.

(b) Zu $R > 0$ betrachten wir die Mengen

$$\begin{aligned} Z &:= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le R^2,\ -R \le z \le R\} \quad (\textit{Zylinder}) \\ K &:= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le z^2,\ -R \le z \le R\} \quad (\textit{Kegel}) \\ B &:= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\} \quad (\textit{Kugel}) \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri, dass

$$\mu(Z) = \mu(K) + \mu(B),$$

und folgern Sie mit Hilfe von Teil (a) noch einmal, dass $\mu(B) = 4\pi R^3/3$.

## Aufgabe 14) (Faltung)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

(a) Die Zuordnung $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ liefert eine auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ integrierbare Funktion.

(b) Es gibt eine integrierbare Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ mit

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - y)g(y)\,\mu(\mathrm{d}y) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \text{ f.ü.},$$

und es gilt

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_1 .$$

**Bemerkung:** Man nennt $f * g$ die Faltung von $f$ und $g$.

(c) Es gilt $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, wobei $\hat{\cdot}$ die aus Aufgabe 12) bekannte Fouriertransformation bezeichnet.

*bitte wenden*

Vortragsthemen für die Übungen am 28. bzw. 29. November 2018:

## Vortrag 13) (Satz von Fubini)

Zeigen Sie, dass

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} = -\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

## Vortrag 14) (Eine Fouriertransformierte)

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}$. Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte von $f$ durch $\hat{f} = (\sqrt{2\pi})^d f$ gegeben ist, indem Sie zuerst im Fall $d = 1$ eine gewöhnliche Differentialgleichung für $\hat{f}$ herleiten.

*Hinweis:* $\hat{f}(0)$ ist ein bekanntes Integral.