technische universität dortmund
fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić
Dr. Albrecht Seelmann

6. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 11) (Die Lebesgueräume)

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie:

(a) Falls $\mu(X) < \infty$, so gilt $L^q(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathbb{C})$ für $1 \leq p < q < \infty$ mit

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_q \quad \text{für alle} \quad f \in L^q(X, \mathbb{C}).$$

Bemerkung: Falls $\mu(X) = \infty$, so muss hier weder die Inklusion $L^q(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathbb{C})$ noch $L^p(X, \mathbb{C}) \subset L^q(X, \mathbb{C})$ gelten, siehe Vortrag 11).

(b) Für $1 \leq p_0 < p < p_1 < \infty$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ für ein $\theta \in (0, 1)$ gilt die Inklusion $L^{p_0}(X, \mathbb{C}) \cap L^{p_1}(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathbb{C})$ mit

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta} \quad \text{für alle} \quad f \in L^{p_0}(X, \mathbb{C}) \cap L^{p_1}(X, \mathbb{C}).$$

Tipp: Höldersche Ungleichung.

Aufgabe 12) (Die Fouriertransformation)

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ definieren wir die sogenannte *Fouriertransformation* $\hat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *von* f durch

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} \, \mu(\mathrm{d}x),$$

wobei $\xi \cdot x$ das euklidische Skalarprodukt der beiden Vektoren x und ξ bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) $\hat{f}$ ist gleichmäßig stetig und beschränkt mit $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.

(b) Ist für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ die durch $x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_j f(x)$ gegebene Funktion Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^d$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = -\mathrm{i} \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} \, \mu(\mathrm{d}x).$$

(c) Ist speziell $d = 1$ und $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$, mit $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ für alle $j = 1, \dots, k$, so gilt

$$\widehat{f^{(j)}}(\xi) = (\mathrm{i}\xi)^j \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Insbesondere gibt es dann eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1 + |\xi|^k} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Tipp: Partielle Integration. Dafür zeige man zunächst, dass $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ gilt.

Bemerkungen: (i) $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ meint hier, dass es einen Vertreter in der Äquivalenzklasse von f gibt, der in $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt.
(ii) Teil (c) gilt entsprechend auch allgemeiner für $d \in \mathbb{N}$, der Beweis benötigt allerdings ein paar technische Modifikationen (Satz von Fubini).

bitte wenden

Vortragsthemen für die Übungen am 21. bzw. 22. November 2018:

Vortrag 11) (Integrierbarkeit)

Untersuchen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^\alpha$ für $x > 0$ auf

- $(0, 1)$
- $(1, \infty)$
- $(0, \infty)$

Lebesgue-integrierbar ist.
Zeigen Sie damit: Für $1 \leq p < q < \infty$ gilt weder $L^q((0,\infty),\mathbb{C}) \subset L^p((0,\infty),\mathbb{C})$ noch $L^p((0,\infty),\mathbb{C}) \subset L^q((0,\infty),\mathbb{C})$.

Vortrag 12) (Die Gammafunktion)

Es bezeichne $\Gamma\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x \,, \quad t > 0 \,,$$

die in der Vorlesung eingeführte *Gammafunktion*. Zeigen Sie:

(a) Für alle $t > 0$ gilt $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$.

(c) Für alle $t > 0$ gilt die *Gaußsche Produktformel*

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! n^t}{t(t+1) \cdot \dots \cdot (t+n)} \,.$$