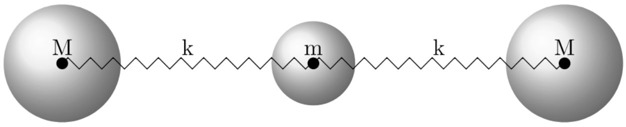
Theoretische Physik I — WiSe 2018/19
3. Übungsblatt

Ausgabe: 06.11.2018 — Ute Löw
Abgabe: 14.11.2018, 12 Uhr

Aufgabe 8: Gekoppelte Massen — 9 Punkte



Das CO_2-Molekül wird als das in der Abbildung gezeigte System dreier gekoppelter Massen betrachtet. Die beiden äußeren Sauerstoffatome haben je die Masse M, das mittlere Kohlenstoffatom die Masse m. Die Sauerstoffatome sind jeweils mit einer Feder, mit der Federkonstanten k, an das Kohlenstoffatom gekoppelt. Im Grundzustand liegen die Atome direkt aneinander, $\Delta x = 0$.

Stellen sie die Bewegungsgleichung des gesamten Systems auf. Berechnen Sie dazu die Eigenfrequenzen und -moden der eindimensionalen Schwingungen entlang der Längsachse des CO_2-Moleküls. Diskutieren sie die Bedeutung der verschiedenen Schwingungen. Warum ist eine der resultierenden Eigenfrequenzen null?

Hinweise: Machen sie sich klar wie jedes Atom von den Bewegungen der anderen abhängt. Fassen Sie die drei einzlenen Bewegungen der Atome in einem Gleichungssystem zusammen, welches Sie dann lösen können. Die Koordinaten der Atommittelpunkte können von links nach rechts, als $x_1 < x_2 < x_3$ gewählt werden.

Aufgabe 9: Die Variation des freien Falls — 11 Punkte

Ein punktförmiges Teilchen der Masse m fällt frei im Schwerefeld der Erde. Die zurückgelegte Fallstrecke des Teilchens sei x.

a) Bestimmen sie die kinetische Energie T, und die potentielle Energie V des Teilchens. *(1 Punkt)*

Nach dem Hamiltonschen Prinzip nimmt das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) \mathrm{d}t \tag{1}$$

für die wahre Bahn ein Extremum an. Dabei ist die Lagrangefunktion L durch

$$L(x, \dot{x}) = T(x, \dot{x}) - V(x) \tag{2}$$

gegeben. Gehen sie von folgender Form des Fallgesetzes aus

$$x = \frac{g}{2} \cdot t_0^2 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\alpha} \quad (\alpha \geq 1). \tag{3}$$

Die Bahn des Teilchens beginnt bei $t = 0,\ x = 0$ und endet bei $t = t_0,\ x = \frac{g}{2} t_0^2$.

b) Bestimmen Sie S durch das gegebene Integral. *(2,5 Punkte)*

c) Bestimmen sie den Wert für α, bei dem die Wirkung extremal wird. Das bedeutet, dass Sie die Funktion $S(\alpha)$ bezüglich α minimieren. *(5,5 Punkte)*

Hinweise: S ist ein Polynom vierten Grades mit vier Nullstellen. Eine Nullstelle kann leicht *geraten* werden. Die weiteren dürfen mit numerischen Methoden ermittelt werden.
Versuchen Sie Terme in Abhängigkeit von α zu finden die bei einer Extrempunktsuche keine Auswirkung haben, diese können sie zu Funktionen, z.B. $y(\alpha)$, zusammenfassen.

d) Begründen Sie, dass das gefundene Minimum das globale Minimum von $S(\alpha)$ auf dem gegebenen Definitionsbereich ist. *(2 Punkte)*