

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 9) (Messbare Abbildungen)

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie:

- (a) Eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X \mid f(x) > a\} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar ist bzw. wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar ist.
- (b) Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f Lebesgue-messbar.
- (c) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn die charakteristische Funktion $\chi_A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 2 auf Blatt 1) Lebesgue-messbar ist.

Aufgabe 10) (Konvergenz von Integralen)

Seien $f, f_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, Lebesgue-messbare Funktionen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ punktweise fast überall. Zeigen Sie:

- (a) Falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mu < \infty$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

für alle Lebesgue-messbaren Mengen $E \subset \mathbb{R}^d$.

- (b) Falls $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k|^2 \, d\mu < \infty$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f g \, d\mu$$

für jede Lebesgue-messbare Funktion g mit $\int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 \, d\mu < \infty$.

Tipp: Man verwende einen Konvergenzsatz aus der Vorlesung für $g_k := |f_k| + |f| - |f_k - f|\chi_E$ in (a) bzw. $g_k := (|f_k - f| - l|g|)^2$, $l \in \mathbb{N}$, in (b).

Vortragsthemen für die Übungen am 14. bzw. 15. November 2018:

Vortrag 9) (Vergleich mit dem Riemann-Integral)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, und sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass f auch Lebesgue-integrierbar ist mit

$$\int_{[a,b]} f \, d\mu = \int_a^b f(x) \, dx .$$

Bemerkung: Für uneigentliche Riemann-Integrale ist diese Aussage ohne zusätzliche Annahmen nicht richtig, siehe Vortrag 10).

Vortrag 10) (Ein uneigentliches Riemann-Integral)

Zeigen Sie: Für die Funktion $f: [\pi, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)/x$ existiert zwar das uneigentliche Riemann-Integral $\int_{\pi}^{\infty} f(x) \, dx$, jedoch ist f auf $[\pi, \infty)$ nicht Lebesgue-integrierbar.

Tipp: Integration von Nullstelle zu Nullstelle.