Ausgabe: 23.10.2018

Ute Löw

Abgabe: 07.11.2018, 12 Uhr

Aufgabe 4: Ein wenig Himmelsmechanik

8 Punkte

a) Der Lenz-Runge-Vektor ist durch

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} + mU(r)\vec{r} \quad (1)$$

definiert. Dabei ist $\vec{L}$ der Relativdrehimpuls des Körpers, er ist erhalten. Der Abstand des Körpers zum Zentralkörper ist r , der Impuls des Körpers ist $\vec{p}$, G ist die Gravitationskonstante und $\vec{e}_r$ bezeichnet den radialen Einheitsvektor in Polarkoordinaten. Das Potenzial des Keplerproblems ist durch

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r} = -G\frac{mM}{r} \quad (2)$$

mit $\alpha > 0$ gegeben. Zeigen Sie, dass der Lenz-Runge-Vektor erhalten ist.

b) Skizzieren sie für mindestens zwei verschiedene Abstände r des Körpers zum Zentralkörper das System in der Bahnebene und zeichnen sie den Lenz-Runge-Vektor ein. Zeigen Sie auch explizit, dass der Lenz-Runge-Vektor in der Bahnebene liegt.

c) Leiten Sie die Bahnkurve $r(\varphi)$ aus dem Skalarprodukt

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = rA \cos(\varphi) \quad (3)$$

her. Der Winkel φ ist der Winkel zwischen dem Ortsvektor des Körpers und dem Lenz-Runge-Vektor. Die Beträge des Lenz-Runge-Vektors sowie des Drehimpulses werden als gegeben angenommen. *Hinweis: Es gilt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$*

Aufgabe 5: Ellipsengleichung

5 Punkte

Eine Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen, festen Punkten (sog. Brennpunkte) konstant ist. Leiten Sie, ausgehend von dieser Definition, die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4)$$

her.

Hinweis: Der Abstand eines Punktes P zu den Brennpunkten M_1 und M_2 ist mit $\overline{M_1PM_2} = \text{const.} = 2a$ anzunehmen.

Aufgabe 6: Der Umgang mit Differenzialgleichungen

9 Punkte

a) Die eindimensionale Bewegung eines Körpers der Masse m und Ortskoordinate z werde durch die Differenzialgleichung

$$m\ddot{z} + \alpha\dot{z} = -mg \quad (5)$$

beschrieben, wobei der Parameter α größer als Null ist. Es sei g die Erdbeschleunigung. Welche Kräfte wirken auf den Körper? Begründen Sie, für welche Kräfte sich Potenziale finden lassen.

Welche Situation wird durch diese Differentialgleichung modelliert?

b) Führen Sie den Parameter $\beta = \frac{\alpha}{m}$ ein und lösen Sie die Differentialgleichung mit den Anfangsbedingungen $z(t=0) \equiv z_0$ und $\dot{z}(t=0) \equiv 0$. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Lösen Sie die homogene Gleichung mithilfe eines Exponentialansatzes.
2. Lösen Sie die inhomogene Gleichung mithilfe des Ansatzes $\ddot{z}_{\text{inh}}(t) = 0$. Erklären Sie, warum dieser Ansatz möglich ist.
3. Ermitteln Sie unbestimmte Konstanten in ihrer gesamten Lösung, indem Sie sie so wählen, dass die Anfangsbedingungen erfüllt werden.

Berechnen Sie die Grenzgeschwindigkeit $v_\infty \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{z}$. Skizzieren Sie anschließend die Graphen von $z(t)$ und $\dot{z}(t)$.

c) Nun werde die Bewegung des Körpers durch die Gleichung

$$\dot{v} = -g + \beta v^2 \quad (6)$$

beschrieben. Hier sei β größer als Null. Verwenden Sie das Verfahren der Trennung der Veränderlichen, um auch diese Differentialgleichung zu lösen. Der allgemeine Anfangswert $v(t=0) \equiv v_0$ sei gegeben. Warum ist zur Lösung dieser Differentialgleichung im Gegensatz zu b) nur ein Anfangswert nötig?

Hinweis: Es gilt $\frac{d}{dx} \operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{1-x^2}$. Dabei bezeichnet $\operatorname{artanh}(x)$ die Umkehrfunktion des Tangens Hyperbolicus. Um das auftretende Integral zu lösen, könnte eine Substitution wie $u^2 = \frac{\beta}{g}v^2$ nützlich sein.

Aufgabe 7: Kinetische Energie eines Vielteilchen-Systems

8 Punkte

Zeigen Sie, dass man die kinetische Energie eines Systems von N -Teilchen mit Massen $m_i, i = 1, \dots, N$ als Summe der folgenden zwei Teile schreiben kann:

1. Die kinetische Energie, die man erhält, wenn die gesamte Masse im Massenzentrum konzentriert ist
2. und die kinetische Energie der Bewegung um das Massenzentrum.