

Übungsaufgaben zu Analysis III
TU Dortmund, WiSe 2018/2019

Vorlesung: Prof. Ivan Veselic

1. Februar 2019

Blatt 1

Aufgabe 1) (Volumenberechnung mit Ausschöpfungen)

- (a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(0, 0)^T$, $(4, 0)^T$ und $(3, 1)^T$ gegebene Dreieck. Wir wollen den Flächeninhalt von D durch Ausschöpfung mit Quadraten bestimmen:

Wir schreiben $Q_{a,k} := [a_1, a_1 + 2^{-k}] \times [a_2, a_2 + 2^{-k}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $2^k a \in \mathbb{Z}^2$ und setzen $D_k := \{Q_{a,k} \mid Q_{a,k} \subset D\}$. Berechnen Sie nun das Volumen $\text{Vol}(D)$ über den Grenzwert

$$\text{Vol}(D) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{Q_{a,k} \in D_k} \text{Vol}(Q_{a,k}).$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem tatsächlichen Flächeninhalt des Dreiecks (Formel aus der Schule).

- (b) Wie bekommt man aus (a) den Flächeninhalt des von den Vektoren $u = (4, 0)^T$ und $v = (3, 1)^T$ aufgespannten Parallelogramms P ?
- (c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus (b) mit der Formel

$$\text{Vol}(P) = \det(u, v),$$

wobei (u, v) die aus den Spalten u und v gebildete 2×2 -Matrix bezeichnet.

Lösung: Zu (a): Zuerst wollen wir bestimmen, wie viele Quadrate $Q_{a,k}$ in dem Dreieck D liegen. Dafür bestimmen wir alle möglichen Koordinaten für die Punkte a , deren Quadrate $Q_{a,k}$ in dem Quader $[0, 4] \times [0, 1]$ liegen und danach schränken wir die Koordinaten so ein, dass wir nur noch Quadrate aus D haben.

Für $a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $2^k a \in \mathbb{Z}^2$ und $Q_{a,k} \subset [0, 4] \times [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} a_1 &= j \cdot 2^{-k} \text{ für } j = 0, \dots, 4 \cdot 2^k - 1, \\ a_2 &= l \cdot 2^{-k} \text{ für } l = 0, \dots, 2^k - 1. \end{aligned}$$

Nun wollen wir nur noch Quadrate in D betrachten:

$$\begin{aligned} Q_{a,k} \subset D &\Leftrightarrow a_2 + 2^{-k} \leq \frac{a_1}{3} \ \& \ a_2 + 2^{-k} \leq 4 - (a_1 + 2^{-k}) \\ &\Leftrightarrow 3(a_2 + 2^{-k}) \leq a_1 \leq 4 - a_2 - 2 \cdot 2^{-k} \\ &\Leftrightarrow 3(l + 1) \leq j \leq 4 \cdot 2^k - l - 2. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Ungleichungen resultieren dabei aus den Schrägen von D , die die linke bzw. rechte obere Ecke der Quadrate beschränken. Man beachte, dass es für $l = 2^k - 1$ kein j gibt, für das die zuletzt erhaltenen beidseitige Ungleichung erfüllt ist. Nun können wir die Anzahl

der Elemente in D_k bestimmen:

$$\begin{aligned}\#D_k &= \sum_{l=0}^{2^k-2} (4 \cdot 2^k - l - 2 - 3(l+1) + 1) \\ &= 4 \cdot \sum_{l=0}^{2^k-2} (2^k - l - 1) = 4 \cdot (2^k - 1)2^{k-1}.\end{aligned}$$

Das Volumen eines einzelnen Quadrats ist offensichtlich $\text{Vol}(Q_{a,k}) = 2^{-2k}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}\text{Vol}(D) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{Q_{a,k} \in D_k} \text{Vol}(Q_{a,k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \#D_k \cdot 2^{-2k} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} 2 \cdot (1 - 2^{-k}) = 2.\end{aligned}$$

Mit der Formel aus der Schule erhält man

$$\frac{g \cdot h}{2} = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2,$$

wobei g die Länge der Grundseite und h die Höhe des Dreiecks bezeichnet. Also stimmen die beiden Ergebnisse überein.

Zu (b) & (c): Das Parallelogramm lässt sich aufteilen in das Dreieck D und in ein zweites Dreieck $\tilde{D}$, wobei $\tilde{D}$ aus D durch eine Rotation und Translation ist D entsteht. Die beiden Dreiecke haben also gleiches Volumen, so dass gilt

$$\text{Vol}(P) = 2 \text{Vol}(D) = 4 = \det \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Determinantenformel liefert also dasselbe Ergebnis wie (b).

Aufgabe 2) (Folgen von Mengen)

Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $\liminf A_k$ und $\limsup A_k$ durch

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq k} A_j, \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq k} A_j.$$

(a) Zeigen Sie: $\liminf_{k \rightarrow \infty} A_k \subset \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$.

Im Falle der Gleichheit in (a) sagen wir, dass die Folge $(A_k)_k$ konvergiert und definieren ihren Grenzwert durch $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k := \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k$.

(b) Zeigen Sie: Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle k bzw. $A_k \supset A_{k+1}$ für alle k , so existiert der Grenzwert $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ gemäß obiger Definition mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k.$$

(c) Zeigen Sie, dass punktweise

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k} = \chi_{\liminf A_k} \quad \text{und} \quad \limsup_{k \rightarrow \infty} \chi_{A_k} = \chi_{\limsup A_k}$$

gilt. Hierbei bezeichne χ_M die sogenannte *charakteristische Funktion* der Menge M , d.h. $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ sonst.

(d) Wir betrachten nun speziell $A_k := (-\infty, a_k) \subset \mathbb{R}$ für eine nach oben beschränkte Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen.

Zeigen Sie: $(-\infty, a) \subset \limsup_{k \rightarrow \infty} A_k \subset (-\infty, a]$ mit $a := \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k$.

Lösung: Zu (a):

$$\begin{aligned} x \in \liminf A_k &\iff \exists k : x \in A_j \quad \forall j \geq k \\ &\implies \forall k \exists j \geq k : x \in A_j \\ &\iff x \in \limsup A_k \end{aligned}$$

Zu (b): Fall $A_k \subset A_{k+1} \forall k$:

$$\begin{aligned} \bigcap_{j \geq k} A_j = A_k &\implies \liminf A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k, \\ \bigcup_{j \geq k} A_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \quad \forall k &\implies \limsup A_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k. \end{aligned}$$

Der Beweis von dem Fall $A_k \supset A_{k+1} \forall k$ verläuft analog.

Zu (c): Zeige

$$\chi_{\bigcup_{k \in N} A_k} = \sup_{k \in N} \chi_{A_k} \quad \text{und} \quad \chi_{\bigcap_{k \in N} A_k} = \inf_{k \in N} \chi_{A_k}$$

für $N \subset \mathbb{N}$. Wir formen dabei folgendermaßen um:

$$\begin{aligned} \chi_{\bigcup_{k \in N} A_k}(x) = 1 &\iff x \in \bigcup_{k \in N} A_k \iff \exists k \in N : x \in A_k \\ &\iff \exists k \in N : \chi_{A_k}(x) = 1 \iff \sup_{k \in N} \chi_{A_k}(x) = 1, \\ \chi_{\bigcap_{k \in N} A_k}(x) = 1 &\iff x \in \bigcap_{k \in N} A_k \iff x \in A_k \quad \forall k \in N \\ &\iff \chi_{A_k}(x) = 1 \quad \forall k \in N \iff \inf_{k \in N} \chi_{A_k}(x) = 1. \end{aligned}$$

Dabei wird jeweils bei der letzten Äquivalenz ausgenutzt, dass nur die Werte 0 und 1 auftreten.

Zu (d): Wir zeigen zuerst die erste Inklusion:

$$x < a = \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} a_j \implies x < \sup_{j \geq k} a_j \quad \forall k \implies \forall k \exists j \geq k : x < a_j, \text{ d.h. } x \in A_j.$$

Daraus folgt $x \in \limsup A_k$, also die erste Inklusion.

Nun zur zweiten Inklusion:

$$\begin{aligned} x \in \limsup A_k &\implies \forall k \exists j \geq k : x < a_j \implies x < \sup_{j \geq k} a_j \quad \forall k \\ &\implies x \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} \sup_{j \geq k} a_j = a \implies x \in (-\infty, a]. \end{aligned}$$

Damit ist auch die zweite Inklusion gezeigt.

Aufgabe 3) (Kardinalität von Vereinigungen)

Sei X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie: Sind $A_1, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, endliche Teilmengen von X , so gilt

$$\# \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right).$$

Hierbei bezeichnet $\#A$ die Kardinalität (d.h. die Anzahl der Elemente) einer Menge A .

Tipp: Induktion.

Lösung: Beweis per Induktion:

(IA) $n = 1$: klar.

Wir zeigen nun auch den Fall $n = 2$, da dies den Induktionsschritt deutlich einfacher macht:

$$\begin{aligned} \#(A_1 \cup A_2) &= \#(A_1 \setminus A_2) + \#(A_2 \setminus A_1) + \#(A_1 \cap A_2) \\ &= (\#A_1 - \#(A_1 \cap A_2)) + (\#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)) + \#(A_1 \cap A_2) \\ &= \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

(IS) $n \mapsto n + 1$:

$$\begin{aligned} \# \left(\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \right) &= \#A_{n+1} + \# \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) - \# \left(A_{n+1} \cap \bigcup_{j=1}^n A_j \right) \\ &= \#A_{n+1} + \# \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) - \# \left(\bigcup_{j=1}^n (A_{n+1} \cap A_j) \right) \\ &= \#A_{n+1} + \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \\ &\quad - \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} (A_{n+1} \cap A_j) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \#A_{n+1} + \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) - \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n+1\} \\ n+1 \in J \\ |J| \geq 2}} (-1)^{\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) + \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n+1\} \\ n+1 \in J}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right) \\
&= \sum_{\substack{J \subset \{1, \dots, n+1\} \\ J \neq \emptyset}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j \in J} A_j \right).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der ersten Gleichheit der Fall $n = 2$ genutzt und in der dritten Gleichheit die Induktionsvoraussetzung.

Aufgabe 4) (Riemann-Integrale)

Finden Sie eine Folge (f_n) Riemann-integrierbarer Funktionen auf $[0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) (f_n) konvergiert punktweise gegen eine *nicht* Riemann-integrierbare Funktion.

Tipp: Aufgabe 2.

- (ii) Die Folge der Integrale $\int_0^1 f_n(x) dx$ konvergiert.

Lösung: Sei $(q_n)_n$ eine Folge in $\mathbb{Q}$ mit $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \{q_n | n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{Q}$ abzählbar) und setze $A_n := \{q_k | k \leq n\}$. Dann gilt $A_n \subset A_{n+1} \forall n$ und $[0, 1] \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Betrachte $f_n := \chi_{A_n}$. Jede Funktion f_n ist Riemann-integrierbar mit

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 0 \quad \forall n, \quad \text{insb.} \quad \int_0^1 f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

womit Eigenschaft (ii) erfüllt ist. Allerdings gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \stackrel{A2}{=} \chi_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} =: f$ und f ist nicht Riemann-integrierbar (bekannt aus Analysis I), womit auch Eigenschaft (i) erfüllt ist.

Blatt 3

Aufgabe 5) (σ -Algebren)

- (a) Sei $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die vom Mengensystem

$$S := \{\emptyset, \{0\}, [0, 1), \{1/3\}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

erzeugte σ -Algebra $\mathcal{A}(S)$ auf X .

Sei nun X eine beliebige nichtleere Menge. Zeigen Sie:

- (b) Ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf X und $\emptyset \neq B \subset X$, so ist das Mengensystem

$$\{B \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra auf B .

Bemerkung: Man nennt dies die *Spur* von $\mathcal{A}$ in B und schreibt dafür symbolisch auch $B \cap \mathcal{A}$.

- (c) Ist X' eine weitere nichtleere Menge und $f: X \rightarrow X'$ eine Abbildung, so ist das Mengensystem

$$\mathcal{A}' := \{A' \subset X' \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra auf X' .

Lösung: Zu (a): Wir bilden zunächst ein Mengensystem, welches abgeschlossen unter Komplementbildung und Vereinigungen ist und zeigen dann, dass dieses Mengensystem bereits die gesuchte σ -Algebra ist. Sei

$$\begin{aligned} \mathcal{M} := & \left\{ \emptyset, X, \{0\}, (0, 1], [0, 1), \{1\}, \left\{\frac{1}{3}\right\}, [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, \right. \\ & \{0, 1\}, (0, 1), \left\{0, \frac{1}{3}\right\}, (0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}, [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}, \\ & \left. \left\{0, 1, \frac{1}{3}\right\}, (0, 1) \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\} \right\}, \end{aligned}$$

wobei die erste Zeile den Mengen aus S und deren Komplementen entspricht, die zweite Zeile den Vereinigungen und deren Komplementen von zwei Mengen der ersten Zeile und die dritte Zeile den Vereinigungen und deren Komplementen von zwei Mengen der ersten beiden Zeilen entspricht.

Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{M} = \mathcal{A}(S)$. Es gilt natürlich $S \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}(S)$. Außerdem ist $\mathcal{M}$ nach Konstruktion abgeschlossen unter Komplementbildung und paarweisen Vereinigungen. Damit ist $\mathcal{M}$ eine Algebra. Da $\mathcal{M}$ ein endliches Mengensystem ist, handelt es sich sogar um eine σ -Algebra (denn jede Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{M}$ ist eine endliche Vereinigung). Es gilt also insgesamt $\mathcal{M} = \mathcal{A}(S)$.

Zu (b): Es gilt $B = B \cap X \in \{B \cap A \mid A \in \mathcal{A}\} =: \mathcal{M}$, da $X \in \mathcal{A}$. Sei $M \in \mathcal{M}$, dann gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $M = B \cap A$. Wir zeigen, dass $B \setminus M \in \mathcal{M}$ ist. Wegen $X \setminus A \in \mathcal{A}$ und

$$\begin{aligned} B \setminus M &= B \cap (X \setminus M) = B \cap (X \setminus (B \cap A)) \\ &= B \cap ((X \setminus B) \cup (X \setminus A)) = \emptyset \cup B \cap (X \setminus A) = B \cap (X \setminus A) \end{aligned}$$

gilt $B \setminus M \in \mathcal{M}$. Seien nun $M_j \in \mathcal{M}$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann existieren $A_j \in \mathcal{A}$ mit $M_j = B \cap A_j$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra ist, gilt $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{A}$ und wir erhalten

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B \cap A_j) = B \cap \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \right) \in \mathcal{M}.$$

Damit ist $\mathcal{M}$ eine σ -Algebra.

Zu (c): Es gilt $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{A}$ und damit $X' \in \mathcal{A}'$. Sei $A' \in \mathcal{A}'$, also $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$f^{-1}(X' \setminus A') = X \setminus f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

und damit $X' \setminus A' \in \mathcal{A}'$. Sei nun $A'_j \in \mathcal{A}'$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$f^{-1}\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A'_j\right) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} f^{-1}(A'_j) \in \mathcal{A},$$

also $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A'_j \in \mathcal{A}'$ und damit ist $\mathcal{A}'$ eine σ -Algebra.

Aufgabe 6) (Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes)

Seien $A, B, A_k \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, Lebesgue-messbar. Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (b) Falls $B \subset A$ und $\mu(B) < \infty$, so gilt $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.
- (c) Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.
- (d) Gilt $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$, so $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k)$.
- (e) In (d) kann auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ im Allgemeinen nicht verzichtet werden.

Lösung: **Zu (a):** Wir schreiben $A \cup B = A \dot{\cup} (B \setminus A)$ und $B = (B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B)$ als disjunkte Vereinigungen. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) &= \mu(A \dot{\cup} (B \setminus A)) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu((B \setminus A) \dot{\cup} (A \cap B)) = \mu(A) + \mu(B). \end{aligned}$$

Zu (b): Wir können $A = B \dot{\cup} (A \setminus B)$ als disjunkte Vereinigung schreiben und erhalten $\mu(A) = \mu(B \dot{\cup} (A \setminus B)) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$. Wegen $\mu(B) < \infty$ können wir das umformen zu $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

Zu (c): Da die Additivität von μ nur für (paarweise) disjunkte Vereinigungen gilt, schreiben wir A_k als disjunkte Vereinigung. Wir definieren $B_1 := A_1$ und $B_{k+1} := A_{k+1} \setminus A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Damit sind die B_k , $k \in \mathbb{N}$, disjunkt. Außerdem gilt $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ und $\bigcup_{k=1}^m B_k = A_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Wir rechnen

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \mu(B_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^m B_k\right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m). \end{aligned}$$

Zu (d): Wir setzen $B_k := A_1 \setminus A_k$. Dann gilt $B_k \subset B_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A_1 \setminus (\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k)$. Ferner gilt wegen $A_{k+1} \subset A_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ auch $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \mu(A_1) < \infty$ und $\mu(A_k) \leq \mu(A_1) < \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir erhalten insgesamt

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) &\stackrel{(b)}{=} \mu\left(A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \stackrel{(c)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) \\ &\stackrel{(b)}{=} \mu(A_1) - \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

und wegen $\mu(A_1) < \infty$ folgt daraus die Behauptung.

Zu (e): Wir wählen $B_k := (k, \infty)$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Diese Mengen sind alle offen und damit messbar. Es gilt $B_{k+1} \subset B_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$, also $\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k) = 0$.

ABER: Es ist $\mu(B_k) = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu(B_k) = \infty$. Damit kann auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ in (d) im Allgemeinen nicht verzichtet werden.

Aufgabe 7) (Nullmengen)

Zeigen Sie:

- (a) Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge mit einem inneren Punkt, d.h. $A^\circ \neq \emptyset$, so ist A keine Nullmenge.
- (b) Die Umkehrung von (a) gilt nicht, d.h. eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, die keine Nullmenge ist, muss keinen inneren Punkt besitzen.
- (c) Für $Q = (a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$, ist $\bar{Q} \setminus Q^\circ$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^d$, wobei $\bar{Q} = [a, b]$ und $Q^\circ = (a, b)$ den (topologischen) Abschluss bzw. das Innere von Q bezeichnen.
- (d) Ist $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge, so ist $N \times \mathbb{R}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{d+k}$.

Lösung: **Zu (a):** Wegen $A^\circ \neq \emptyset$ existiert ein $x \in A$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset A$. Damit finden wir einen halboffenen Quader $Q \subset B_\varepsilon(x) \subset A$ (wähle z.B. $Q = (a, b]$ mit $a = x - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{d}}(1, \dots, 1)^T$ und $b = x + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{d}}(1, \dots, 1)^T$). Wir haben also insgesamt

$$0 < \mu(Q) = \mu^*(Q) \stackrel{Q \subset A}{\leq} \mu^*(A)$$

und damit ist A keine Nullmenge.

Zu (b): Wir betrachten $A := (0, 1]^d \setminus \mathbb{Q}^d$. Dann ist $A^\circ = \emptyset$, da $\mathbb{Q}^d$ dicht in $\mathbb{R}^d$ ist, aber

$$0 < \mu^*((0, 1]^d) = \mu^*(A) + \mu^*((0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d) = \mu^*(A),$$

wobei $\mu^*((0, 1]^d \cap \mathbb{Q}^d) = 0$, da $\mathbb{Q}^d$ abzählbar ist.

Zu (c): Es gilt $\bar{Q} = [a, b] = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} (a_k, b]$ mit $a_k := a - \frac{1}{k}(1, \dots, 1)^T$. Damit erhalten wir

$$\mu(\bar{Q}) = \mu\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} (a_k, b]\right) \stackrel{6d)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu((a_k, b]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^d (b_j - a_j + \frac{1}{k}) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \mu(Q).$$

Andererseits bekommen wir $Q^\circ = (a, b) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (a, b_k]$ mit $b_k := b - \frac{1}{k}(1, \dots, 1)^T$ und damit

$$\mu(Q^\circ) = \mu\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (a, b_k]\right) \stackrel{6c)}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu((a, b_k]) = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^d (b_j - a_j - \frac{1}{k}) = \prod_{j=1}^d (b_j - a_j) = \mu(Q).$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\mu(Q^\circ) = \mu(Q) = \mu(\bar{Q}) = \mu((\bar{Q} \setminus Q^\circ) \dot{\cup} Q^\circ) = \mu(\bar{Q} \setminus Q^\circ) + \mu(Q^\circ)$$

und wegen $\mu(Q^\circ) = \mu(Q) < \infty$ folgt daraus die Behauptung.

Zu (d): Wir zeigen, dass $N \times (-l, l]^k$ eine Nullmenge für alle $l \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist auch $N \times \mathbb{R}^k = N \times (\bigcup_{l \in \mathbb{N}} (-l, l]^k) = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} (N \times (-l, l]^k)$ als abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge.

Es sei $l \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann finden wir halboffene Quader Q_j für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $N \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} Q_j$ und $\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_d(Q_j) < \frac{\varepsilon}{(2l)^k}$ wegen der Definition von μ^* ; hierbei haben wir zur besseren Übersicht ausnahmsweise die Dimension als Index beim Maß mitgeführt. Damit sind aber auch $\tilde{Q}_j := Q_j \times (-l, l]^k \subset \mathbb{R}^{d+k}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ halboffene Quader mit $N \times (-l, l]^k \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{Q}_j$ und

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_{d+k}(\tilde{Q}_j) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\mu_d(Q_j) \mu_k(-l, l]^k \right) = (2l)^k \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu_d(Q_j) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, muss $N \times (-l, l]^k$ eine Nullmenge für alle $l \in \mathbb{N}$ sein. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 8) (Graphen als Nullmengen)

Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

- (a) Sei $\hat{D}$ die Menge aller halboffenen Quader der Form $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$, $a < b$, deren Abschluss $[a, b]$ (vgl. Aufgabe 7c) in D enthalten ist. Zeigen Sie, dass

$$D = \bigcup_{Q \in \hat{D}} \bar{Q} = \bigcup_{Q \in \hat{D}} Q.$$

- (b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass der Graph

$$G(f) := \{(x, f(x))^T \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

von f eine Nullmenge ist.

Lösung: Zu (a): Zunächst gilt natürlich

$$\bigcup_{Q \in \hat{D}} Q \subset \bigcup_{Q \in \hat{D}} \bar{Q} \stackrel{\bar{Q} \subset D}{\subset} D.$$

Zu zeigen bleibt daher nur noch

$$D \subset \bigcup_{Q \in \widehat{D}} Q.$$

Sei dazu $x = (x_1, \dots, x_d)^T \in D$. Da D offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset D$. Wir wählen $a = (a_1, \dots, a_d)^T \in \mathbb{Q}^d$ und $b = (b_1, \dots, b_d)^T \in \mathbb{Q}^d$ mit

$$x_j - \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}} < a_j < x_j < b_j < x_j + \frac{\varepsilon}{\sqrt{d}}$$

für alle $j = 1, \dots, d$. Damit ist $[a, b] \subset B_\varepsilon(x) \subset D$ und demnach auch $x \in (a, b] \in \widehat{D}$. Wir erhalten insgesamt $x \in \bigcup_{Q \in \widehat{D}} Q$ und damit ist die Behauptung gezeigt.

Zu (b): Es sei $Q \in \widehat{D}$ und $\varepsilon > 0$. Da $\bar{Q}$ kompakt und f stetig auf $\bar{Q}$ ist, ist f sogar gleichmäßig stetig auf $\bar{Q}$. Das heißt es existiert ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{2\mu_d(Q)}$ für alle $x, y \in \bar{Q}$ mit $|x - y| < \delta$. Wir unterteilen Q in m „kleinere“ halboffene Quader $Q_1, \dots, Q_m$, die jeweils einen Durchmesser haben, der kleiner als δ ist. Wir erhalten also $Q = \bigcup_{k=1}^m Q_k$, wobei die Q_k (paarweise) disjunkt sind. Nun wählen wir $c_k \in f(Q_k)$ für alle $k = 1, \dots, m$. Dann gilt $f(Q_k) \subset (c_k - \varepsilon^*, c_k + \varepsilon^*]$, weil wir den Durchmesser der Q_k passend gewählt haben. Wir setzen $\tilde{Q}_k := Q_k \times (c_k - \varepsilon^*, c_k + \varepsilon^*]$. Diese $\tilde{Q}_k$ sind wieder halboffene Quader und es gilt

$$\mu_{d+1}(\tilde{Q}_k) = \mu_d(Q_k) \mu_1((c_k - \varepsilon^*, c_k + \varepsilon^*]) = \mu_d(Q_k) 2\varepsilon^*,$$

sowie $G(f|_Q) \subset \bigcup_{k=1}^m \tilde{Q}_k$. Damit erhalten wir mit der Subadditivität

$$\mu_{d+1}(G(f|_Q)) \leq \mu_{d+1}\left(\bigcup_{k=1}^m \tilde{Q}_k\right) \leq \sum_{k=1}^m \mu_{d+1}(\tilde{Q}_k) = 2\varepsilon^* \sum_{k=1}^m \mu_d(Q_k) = 2\varepsilon^* \mu_d(Q) = \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu_{d+1}(G(f|_Q)) = 0$. Mithilfe von Aufgabenteil (a) gilt $G(f) = \bigcup_{Q \in \widehat{D}} G(f|_Q)$. Damit und der Abzählbarkeit von $\widehat{D}$ (denn $\mathbb{Q}^d \times \mathbb{Q}^d$ ist abzählbar) folgt die Behauptung.

Blatt 5

Aufgabe 9) (Messbare Abbildungen)

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie:

- (a) Eine Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X \mid f(x) > a\} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar ist bzw. wenn für alle $a \in \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar ist.
- (b) Ist $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f Lebesgue-messbar.
- (c) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn die charakteristische Funktion $\chi_A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (vgl. Aufgabe 2 auf Blatt 1) Lebesgue-messbar ist.

Lösung: Zu (a): Ist zunächst f Lebesgue-messbar, so sind $\{x \in X \mid f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty))$ und $\{x \in X \mid f(x) \geq a\} = f^{-1}([a, \infty))$ für alle $a \in \mathbb{R}$ nach Definition Lebesgue-messbar, da (a, ∞) und $[a, \infty)$ offen bzw. abgeschlossen und damit Borelmengen sind.

Sind umgekehrt alle Urbilder $f^{-1}((a, \infty))$ Lebesgue-messbar, so sind wegen der Gleichung $(a, b] = (a, \infty) \setminus (b, \infty)$ auch alle Urbilder $f^{-1}((a, b]) = f^{-1}((a, \infty)) \setminus f^{-1}((b, \infty))$ für $a < b$ Lebesgue-messbar. Da die halboffenen Intervalle $(a, b]$ die σ -Algebra der Borelschen Mengen erzeugen (vgl. Vortrag 6), folgt aus Aufgabe 5 c), dass $f^{-1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Lebesgue-messbar ist, d.h. f ist Lebesgue-messbar.

Sind schließlich alle Urbilder $f^{-1}([a, \infty))$ Lebesgue-messbar, so sind wegen der Gleichung $(a, \infty) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [a + 1/k, \infty)$ auch alle Urbilder $f^{-1}((a, \infty)) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}([a + 1/k, \infty))$ schon Lebesgue-messbar. Nach dem zuvor Gezeigten ist f dann Lebesgue-messbar.

Zu (b): Da f stetig ist, ist für alle $A \in \mathcal{T}$ das Urbild $f^{-1}(A)$ offen, insbesondere Lebesgue-messbar. Mit Aufgabe 5 c) folgt, dass $f^{-1}(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}(\mathcal{T}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ Lebesgue-messbar ist, d.h. f ist Lebesgue-messbar.

Zu (c): Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\chi_A^{-1}((a, \infty)) = \begin{cases} \emptyset, & a \geq 1, \\ A, & a \in [0, 1), \\ \mathbb{R}^d, & a < 0, \end{cases}$$

und mit Teil (a) folgt die Behauptung.

Aufgabe 10) (Konvergenz von Integralen)

Seien $f, f_k: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, Lebesgue-messbare Funktionen mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$ punktweise fast überall. Zeigen Sie:

(a) Falls $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mu < \infty$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k \, d\mu = \int_E f \, d\mu$$

für alle Lebesgue-messbaren Mengen $E \subset \mathbb{R}^d$.

(b) Falls $\sup_{k \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k|^2 \, d\mu < \infty$, so gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} f g \, d\mu$$

für jede Lebesgue-messbare Funktion g mit $\int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 \, d\mu < \infty$.

Tipp: Man verwende einen Konvergenzsatz aus der Vorlesung für $g_k := |f_k| + |f| - |f_k - f| \chi_E$ in (a) bzw. $g_k := (|f_k - f| - l|g|)^2$, $l \in \mathbb{N}$, in (b).

Lösung: Zu (a): Betrachte $g_k := |f_k| + |f| - |f_k - f|\chi_E \geq 0$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = 2|f|$. Das Lemma von Fatou liefert dann

$$2 \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_k \, d\mu = 2 \int_{\mathbb{R}^d} |f| \, d\mu - \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| \chi_E \, d\mu,$$

also $0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| \chi_E \, d\mu \leq 0$, d.h. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| \chi_E \, d\mu = 0$. Schließlich folgt

$$\left| \int_E f_k \, d\mu - \int_E f \, d\mu \right| \leq \int_E |f_k - f| \, d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Zu (b): Nach Voraussetzung gibt es ein $M > 0$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} |f_k|^2 \, d\mu \leq M$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit dem Lemma von Fatou gilt dann auch $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, d\mu \leq M$, denn

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2 \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{k \rightarrow \infty} |f_k|^2 \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k|^2 \, d\mu \leq M.$$

Mit der bekannten Ungleichung $2ab \leq a^2 + b^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt $|f_k - f|^2 \leq 2|f_k|^2 + 2|f|^2$ und somit

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f|^2 \, d\mu \leq 4M.$$

Betrachte für $l \in \mathbb{N}$ die Funktionenfolge $g_k := (|f_k - f| - l|g|)^2 \geq 0$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} g_k = l^2|g|^2$. Das Lemma von Fatou liefert dann

$$\begin{aligned} l^2 \int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 \, d\mu &= \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{k \rightarrow \infty} g_k \, d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_k \, d\mu \\ &\leq 4M + l^2 \int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 \, d\mu - 2l \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| |g| \, d\mu, \end{aligned}$$

also

$$0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| |g| \, d\mu \leq \frac{4M}{2l} = \frac{2M}{l}.$$

Da l beliebig war, erhalten wir im Grenzübergang $l \rightarrow \infty$, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| |g| \, d\mu = 0$. Schließlich folgt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_k g \, d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} f g \, d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f_k - f| |g| \, d\mu \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Blatt 6

Aufgabe 11) (Die Lebesgueräume)

Sei $X \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar. Zeigen Sie:

- (a) Falls $\mu(X) < \infty$, so gilt $L^q(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathbb{C})$ für $1 \leq p < q < \infty$ mit

$$\|f\|_p \leq \mu(X)^{1/p-1/q} \cdot \|f\|_q \quad \text{für alle } f \in L^q(X, \mathbb{C}).$$

Bemerkung: Falls $\mu(X) = \infty$, so muss hier weder die Inklusion $L^q(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathbb{C})$ noch $L^p(X, \mathbb{C}) \subset L^q(X, \mathbb{C})$ gelten, siehe Vortrag 11).

- (b) Für $1 \leq p_0 < p < p_1 < \infty$ mit $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ für ein $\theta \in (0, 1)$ gilt die Inklusion $L^{p_0}(X, \mathbb{C}) \cap L^{p_1}(X, \mathbb{C}) \subset L^p(X, \mathbb{C})$ mit

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \cdot \|f\|_{p_1}^{\theta} \quad \text{für alle } f \in L^{p_0}(X, \mathbb{C}) \cap L^{p_1}(X, \mathbb{C}).$$

Tipp: Höldersche Ungleichung.

Lösung: **Zu (a):** Setze $p' := \frac{q}{p} > 1$ und $q' := \frac{q}{q-p} > 1$, so dass $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$. Für $f \in L^q(X, \mathbb{C})$ gilt dann $|f|^p \in L^{p'}(X, \mathbb{C})$, also

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^p \cdot 1 \, \mu(dx) \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_X \underbrace{(|f|^p)^{p'}}_{=|f|^q} \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_X \underbrace{1^{q'}}_{=\mu(X)} \mu(dx) \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \|f\|_q^p \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} < \infty. \end{aligned}$$

Mit der p -ten Wurzel folgt dann die Behauptung.

Zu (b): Wir schreiben

$$1 = \underbrace{(1-\theta)\frac{p}{p_0}}_{=: \frac{1}{p'} < 1} + \underbrace{\theta\frac{p}{p_1}}_{=: \frac{1}{q'} < 1}.$$

Für $f \in L^{p_0}(X, \mathbb{C}) \cap L^{p_1}(X, \mathbb{C})$ gilt dann

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &= \int_X |f|^{(1-\theta)p} \cdot |f|^{\theta p} \mu(dx) \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_X \left(|f|^{(1-\theta)p} \right)^{p'} \mu(dx) \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_X \left(|f|^{\theta p} \right)^{q'} \mu(dx) \right)^{\frac{1}{q'}} \\ &= \left(\int_X |f|^{p_0} \mu(dx) \right)^{\frac{(1-\theta)p}{p_0}} \cdot \left(\int_X |f|^{p_1} \mu(dx) \right)^{\frac{\theta p}{p_1}} = \|f\|_{p_0}^{(1-\theta)p} \|f\|_{p_1}^{\theta p} < \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 12) (Die Fouriertransformation)

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ definieren wir die sogenannte *Fouriertransformation* $\hat{f}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ von f durch

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx),$$

wobei $\xi \cdot x$ das euklidische Skalarprodukt der beiden Vektoren x und ξ bezeichnet. Zeigen Sie:

- (a) $\hat{f}$ ist gleichmäßig stetig und beschränkt mit $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.
- (b) Ist für alle $j \in \{1, \dots, d\}$ die durch $x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto x_j f(x)$ gegebene Funktion Lebesgue-integrierbar auf $\mathbb{R}^d$, so ist $\hat{f}$ stetig partiell differenzierbar mit

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = -i \int_{\mathbb{R}^d} x_j f(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx).$$

- (c) Ist speziell $d = 1$ und $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $k \in \mathbb{N}$, mit $f^{(j)} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ für alle $j = 1, \dots, k$, so gilt

$$\widehat{f^{(j)}}(\xi) = (i\xi)^j \hat{f}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, k.$$

Insbesondere gibt es dann eine Konstante $C > 0$ mit

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1 + |\xi|^k} \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R}.$$

Tipp: Partielle Integration. Dafür zeige man zunächst, dass $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ gilt.

Bemerkungen: (i) $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ meint hier, dass es einen Vertreter in der Äquivalenzklasse von f gibt, der in $C^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ liegt.

(ii) Teil (c) gilt entsprechend auch allgemeiner für $d \in \mathbb{N}$, der Beweis benötigt allerdings ein paar technische Modifikationen (Satz von Fubini).

Lösung: Zu (a): $\hat{f}$ beschränkt:

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overbrace{e^{-i\xi \cdot x}}^{|\cdot|=1} \mu(dx) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \mu(dx) = \|f\|_1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

$\hat{f}$ gleichmäßig stetig: Es gilt

$$\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(e^{-i(\xi+h) \cdot x} - e^{-i\xi \cdot x} \right)}_{=e^{-i\xi \cdot x}(e^{-ih \cdot x} - 1)} f(x) \mu(dx),$$

also

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\overbrace{|e^{-ih \cdot x} - 1|}^{\leq 2}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \quad \forall x} |f(x)| \mu(dx) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

nach majorisierter Konvergenz, unabhängig von ξ .

Zu (b): Die partiellen Ableitungen $\partial_{\xi_j}(f(x)e^{-ix \cdot \xi}) = -ix_j f(x)e^{-ix \cdot \xi}$ existieren für alle (x, ξ) und alle j . Da $|-ix_j f(x)e^{-ix \cdot \xi}| = |x_j| |f(x)|$ und $\int_{\mathbb{R}^d} |x_j| |f(x)| \mu(dx) < \infty \quad \forall j$ nach Voraussetzung, ist nun für jedes j die durch $g(x) := |x_j| |f(x)|$ gegebene Funktion eine integrierbare Majorante für die partielle Ableitung nach dem j -ten Argument.

Da für alle komplexwertigen Funktionen $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ sowohl $|\operatorname{Re}(h(x))| \leq |h(x)|$ als auch $|\operatorname{Im}(h(x))| \leq |h(x)|$ gilt, sind die Bedingungen aus Folgerung 5.16 für den Real- und Imaginärteil von $f(x)e^{-ix \cdot \xi}$ separat erfüllt. Somit sind die Integrale des Real- und Imaginärteils ($= \operatorname{Re}(\hat{f})$ und $\operatorname{Im}(\hat{f})$) separat partiell differenzierbar und folglich auch $\hat{f}$ mit den geforderten partiellen Ableitungen. Mit Teil (a) folgt, dass diese partiellen Ableitungen auch stetig sind.

Zu (c): Zunächst gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$, denn

$$f(x) - f(0) \stackrel{\text{HDI}}{=} \int_0^x f'(t) \mu(dt) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \int_{(0, \infty)} f'(t) \mu(dt)$$

nach majorisierter Konvergenz. Somit existiert $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, und da f integrierbar ist muss $c = 0$ gelten. Analog folgt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Für jedes $R > 0$ gilt nun mit partieller Integration

$$\int_{-R}^R f'(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx) = f(R) e^{-i\xi \cdot R} - f(-R) e^{i\xi \cdot R} + i\xi \int_{-R}^R f(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx).$$

Die ersten beiden Summanden auf der rechten Seite gehen hierbei für $R \rightarrow \infty$ gegen 0. Mit majorisierter Konvergenz erhalten wir daher

$$\int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f'(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx) = i\xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx),$$

d.h. $\widehat{f'}(\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi)$. Über Iteration ergibt sich

$$\widehat{f^{(j)}}(\xi) = (i\xi)^j \widehat{f}(\xi) \quad \forall \xi, j = 1, \dots, k.$$

Insbesondere:

$$(1 + \underbrace{|\xi|^k}_{=|(i\xi)^k|}) |\widehat{f}(\xi)| = |\widehat{f^{(k)}}(\xi)| \stackrel{\text{a)}}{\leq} \|f\|_1 + \|f^{(k)}\|_1 =: C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Blatt 7

Aufgabe 13) (Cavalieri)

- (a) Sei $A \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue-messbar und $p = (p', h)^T \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{d+1}$ mit $h > 0$ gegeben. Der Kegel $K(A)$ von A sei nun definiert durch

$$K(A) := \{tp + (1-t)(a, 0)^T \mid a \in A, t \in [0, 1]\} \subset \mathbb{R}^{d+1}.$$

Wir nehmen an, dass $K(A)$ Lebesgue-messbar ist. Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri, dass

$$\mu_{d+1}(K(A)) = \frac{h}{d+1} \mu_d(A),$$

wobei μ_d und μ_{d+1} das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^d$ bzw. $\mathbb{R}^{d+1}$ bezeichnet.

- (b) Zu $R > 0$ betrachten wir die Mengen

$$\begin{aligned} Z &:= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq R^2, -R \leq z \leq R\} \quad (\text{Zylinder}) \\ K &:= \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z^2, -R \leq z \leq R\} \quad (\text{Kegel}) \end{aligned}$$

$$B := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad (Kugel)$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri, dass

$$\mu(Z) = \mu(K) + \mu(B),$$

und folgern Sie mit Hilfe von Teil (a) noch einmal, dass $\mu(B) = 4\pi R^3/3$.

Lösung: Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned} K(A) &= \{t(p', h)^T + (1-t)(a, 0)^T \mid a \in A, t \in [0, 1]\} \\ &= \{(tp' + (1-t)a, \underbrace{th}_{=:x})^T \mid a \in A, t \in [0, 1]\} \\ &= \left\{ \left(\frac{x}{h}p' + \left(1 - \frac{x}{h}\right)a, x \right)^T \mid a \in A, x \in [0, h] \right\}. \end{aligned}$$

Dafür definieren wir

$$K_x(A) = \{y \in \mathbb{R}^d \mid (y, x)^T \in K(A)\} = \begin{cases} \left\{ \frac{x}{h}p' + \left(1 - \frac{x}{h}\right)a \mid a \in A \right\} & x \in [0, h] \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit gilt

$$\mu_d(K_x(A)) = \mu_d(\{(1 - \frac{x}{h})a \mid a \in A\}) = \left(1 - \frac{x}{h}\right)^d \mu_d(A),$$

mit Hilfe der Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes und seines Verhaltens unter lineare Abbildungen (Vorträge 7 und 8). Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$\mu_{d+1}(K(A)) = \int_{[0, h]} \mu_d(K_x(A)) \mu_d(dx) = \mu_d(A) \int_0^h \left(1 - \frac{x}{h}\right)^d dx = \mu_d(A) \frac{h}{d+1}.$$

Zu (b): Wir definieren

$$\begin{aligned} Z_z &:= \begin{cases} \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\} & z \in [-R, R] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}, \\ K_z &:= \begin{cases} \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq z^2\} & z \in [-R, R] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}, \\ B_z &:= \begin{cases} \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2\} & z \in [-R, R] \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}. \end{aligned}$$

Dann, $\mu_2(B_z) = \pi(R^2 - z^2) = \mu_2(Z_z) - \mu_2(K_z)$ für alle $z \in [-R, R]$. Das Prinzip von Cavalieri liefert

$$\mu_3(B) = 2 \int_{[0, R]} \mu_2(B_z) \mu(dz) = 2 \int_{[0, R]} \mu_2(Z_z) \mu(dz) - 2 \int_{[0, R]} \mu_2(K_z) \mu(dz) = \mu_3(Z) - \mu_3(K).$$

Da $\mu_3(Z) = 2\pi R^3$ und $\mu_3(K) = \frac{2}{3}\pi R^3$ (bei Anwendung des Teils (a)), gilt $\mu_3(B) = 2\pi R^3 - \frac{2}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Aufgabe 14) (Faltung)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Zeigen Sie:

- (a) Die Zuordnung $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ liefert eine auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ integrierbare Funktion.
 (b) Es gibt eine integrierbare Funktion $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ mit

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) \mu(dy) \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d \text{ f.ü.,}$$

und es gilt

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Bemerkung: Man nennt $f * g$ die Faltung von f und g .

- (c) Es gilt $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$, wobei $\hat{\cdot}$ die aus Aufgabe 12) bekannte Fouriertransformation bezeichnet.

Lösung: **Zu (a):** Die Funktionen $(x, y) \mapsto f(x)$ und $(x, y) \mapsto g(y)$ sind messbar und somit auch $(x, y) \mapsto f(x)g(y)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| |g(y)| \mu(dy) \mu(dx) = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Dann ist $(x, y) \mapsto |f(x)| |g(y)|$ integrierbar, und nach der Transformationsformel gilt auch, dass $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ integrierbar ist.

Zu (b): Nach Fubini ist $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$ doppelintegrierbar, womit die Existenz von $f * g$ folgt. Nun

$$\|f * g\|_1 = \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)| \mu(dx) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)| |g(y)| \mu(dy) \mu(dx) = \|g\|_1 \|f\|_1.$$

Zu (c): Nach dem Satz von Fubini und der Transformationsformel gilt

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) e^{-i\xi \cdot x} \mu(dy) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) e^{-i\xi \cdot (x-y)} \mu(dx) g(y) e^{-i\xi \cdot y} \mu(dy) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Blatt 8**Aufgabe 15) (Reihenwerte)**

Berechnen Sie mit Hilfe der Substitution $x = u-v$ und $y = u+v$ das Integral $\int_{(0,1)^2} \frac{1}{1-xy} d(x, y)$ und folgern Sie damit den Reihenwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Tipp: Satz von Fubini und geschickte eindimensionale Substitution.

Lösung: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{(0,1)^2} \frac{1}{1-xy} \mu(d(x,y)) &\stackrel{\text{geom. Reihe}}{=} \int_{(0,1)^2} \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \mu(d(x,y)) \\
 &\stackrel{\text{mon. Konv.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{(0,1)^2} (xy)^k \mu(d(x,y)) \\
 &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 x^k dx \right)^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k+1} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.
 \end{aligned}$$

Nun wir betrachten die Abbildung $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$T(u, v) = \begin{pmatrix} u-v \\ u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Damit beschreibt T eine Drehstreckung mit Skalierungsfaktor $\sqrt{2}$ und Drehwinkel 45° . Außerdem ist T bijektiv mit $T^{-1}(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2} \right)^T$. Dementsprechend beschreibt T^{-1} eine Drehstreckung mit Skalierungsfaktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ und Drehwinkel -45° . Es gilt

$$|\det(DT(u, v))| = |\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}| = 2$$

und mit dem Transformationssatz erhalten wir

$$\int_{(0,1)^2} \frac{1}{1-xy} \mu(d(x,y)) = \int_M \frac{2}{1-u^2+v^2} \mu(d(u,v))$$

mit $M := T^{-1}((0,1)^2)$. Aus Symmetriegründen und wegen Fubini gilt

$$\begin{aligned}
 \int_M \frac{2}{1-u^2+v^2} \mu(d(u,v)) &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2} dv du \\
 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2} \int_0^u \frac{1}{1+\frac{v^2}{1-u^2}} dv du + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1-u^2} \int_0^{1-u} \frac{1}{1+\frac{v^2}{1-u^2}} dv du \\
 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) du
 \end{aligned}$$

$$+ 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

Im ersten Integral substituieren wir $u = \sin(\varphi)$ und im zweiten Integral substituieren wir $u = \cos(\varphi)$ und vereinfachen die Integrale mit $1 = \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)$ und Additionstheoremen zu

$$\begin{aligned} \int_{(0,1)^2} \frac{1}{1-xy} \mu(d(x,y)) &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\ &\quad + 4 \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}} \arctan\left(\frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}\right) d\varphi \\ &\quad + 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}} \arctan\left(\frac{1-\cos(\varphi)}{\sqrt{1-\sin^2(\varphi)}}\right) d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \arctan\left(\frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right) d\varphi + 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \arctan\left(\frac{2\sin^2(\frac{\varphi}{2})}{2\sin(\frac{\varphi}{2})\cos(\frac{\varphi}{2})}\right) d\varphi \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \varphi d\varphi + 4 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Aufgabe 16) (Flächeninhalte)

Seien $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und $0 < p < q$. Durch die Menge

$$M := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\} \mid px \leq y^2 \leq qx, \quad ay \leq x^2 \leq by\}$$

wird ein krummlinig berandetes Viereck $M \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ beschrieben. Skizzieren Sie M und berechnen Sie seinen Flächeninhalt mittels einer geeigneten Transformation.

Lösung: Wir betrachten die Menge

$$\begin{aligned} M &:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\} \mid px \leq y^2 \leq qx, \quad ay \leq x^2 \leq by \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\} \mid p \leq \frac{y^2}{x} \leq q, \quad a \leq \frac{x^2}{y} \leq b \right\} \end{aligned}$$

und definieren $v := \frac{y^2}{x}$ sowie $u := \frac{x^2}{y}$. Wenn wir das umformen erhalten wir $x = \sqrt[3]{u^2 v}$ und $y = \sqrt[3]{u v^2}$. Wir definieren nun die Abbildung $T : (0, \infty)^2 \rightarrow (0, \infty)^2$ mit $T(u, v) = (\sqrt[3]{u^2 v}, \sqrt[3]{u v^2})$. T ist ein Diffeomorphismus mit $T^{-1}(x, y) = (\frac{x^2}{y}, \frac{y^2}{x})$ und $T([a, b] \times [p, q]) = M$. Mit

$$|\det DT(u, v)| = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} \\ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{v^2}{u^2}} & \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \end{pmatrix} \right| = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

und dem Transformationssatz gilt

$$\begin{aligned} \mu_2(M) &= \int_{(0, \infty)^2} \chi_M(x, y) \mu(d(x, y)) \\ &\stackrel{\text{Trafo.}}{=} \int_{(0, \infty)^2} (\chi_M \circ T)(u, v) |\det DT(u, v)| \mu(d(u, v)) \\ &= \frac{1}{3} \int_{(0, \infty)^2} \chi_{[a, b] \times [p, q]}(u, v) \mu(d(u, v)) \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{3} \int_a^b \int_p^q 1 \, dv du \\ &= \frac{1}{3} (b - a)(q - p). \end{aligned}$$

Blatt 9

Aufgabe 17) (Integrale)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

- (i) $\int_E \sqrt{16x^2 + 9y^2} \mu(d(x, y))$ mit $E := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/9 + y^2/16 < 1\}$.
- (ii) $\int_F e^{-(x^2+4y^2)} \mu(d(x, y))$ mit $F := \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x^2/4 + y^2 < 1\}$.
- (iii) $\int_G x^2 \mu(d(x, y, z))$ mit $G := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid 9x^2 + 4y^2 + z^2 < 36\}$.

Lösung: Zu (i): Wir haben $E = g(B_1(0))$ mit dem Diffeomorphismus $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (3u, 4v)^T$, mit $\det Dg(u, v) = 12$. Mit der Transformationsformel folgt dann

$$\begin{aligned} \int_E \sqrt{16x^2 + 9y^2} \mu(d(x, y)) &= \int_{B_1(0)} \sqrt{16 \cdot (3u^2) + 9 \cdot (4v)^2} \cdot 12 \mu(d(u, v)) \\ &= 144 \int_{B_1(0)} \sqrt{u^2 + v^2} \mu(d(u, v)) \\ &= 144 \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} \sqrt{r^2} \cdot r \mu(d(r, \varphi)) \\ &= 144 \cdot 2\pi \int_0^1 r^2 dr = 96\pi, \end{aligned}$$

wobei wir für die dritte Gleichheit auf Polarkoordinaten transformiert und für die vierte Gleichheit Fubini angewendet haben.

Zu (ii): Hier gilt $F = g(B_1(0))$ für $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = (2u, v)^T$, mit $\det Dg(u, v) = 12$. Ähnlich wie für (i) berechnen wir dann

$$\begin{aligned} \int_F e^{-(x^2+4y^2)} \mu(d(x, y)) &= \int_{B_1(0)} e^{-4(u^2+v^2)} \cdot 2 \mu(d(u, v)) \\ &= 2 \int_{(0,1) \times (0,2\pi)} e^{-4r^2} \cdot r \mu(d(r, \varphi)) \\ &= 2 \cdot 2\pi \int_0^1 r e^{-4r^2} dr = \frac{\pi(1 - e^{-4})}{2}. \end{aligned}$$

Zu (iii): Diesmal haben wir $G = g(B_1(0))$ für $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g(u, v, w) = (2u, 3v, 6w)^T$, mit $\det Dg(u, v, w) = 36$. Mit der Transformationsformel, Kugelkoordinaten und Fubini berechnen wir wie zuvor

$$\begin{aligned} \int_G x^2 \mu(d(x, y, z)) &= \int_{B_1(0)} 4u^2 \cdot 36 \mu(d(u, v)) \\ &= 144 \int_{(0,1) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2)} r^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \theta \cdot r^2 \cos \theta \mu(d(r, \varphi, \theta)) \\ &= 144 \int_0^1 r^4 dr \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = \frac{192\pi}{5}. \end{aligned}$$

Aufgabe 18) (Mannigfaltigkeiten)

Zeigen Sie die folgende Charakterisierung für Mannigfaltigkeiten: Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d , wenn es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Menge $W \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in W$ und eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung $F: W \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ gibt derart, dass

$$W \cap M = F^{-1}(\{0\})$$

gilt und $DF(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ Rang $n - d$ hat.

Lösung: „ $\Rightarrow$ “: Sei $p \in M$. Nach Voraussetzung gibt es eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ mit $U \subset M$ offen, $p \in M$, $U' \subset \mathbb{R}^d$ offen. Das Begradigungslemma liefert dann einen Diffeomorphismus $\Phi: W \rightarrow W'$ mit $W \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in W$, $W \cap M \subset U$, $W' \subset U' \times \mathbb{R}^{n-d}$ offen und $\Phi(x) = (\varphi(x), 0)^T$ für alle $x \in W \cap M$. Dem Beweis des Begradigungslemmas folgend hat Φ^{-1} dabei die Form $\Phi^{-1}(y, z_1, \dots, z_{n-d}) = \varphi^{-1}(y) + z_1 v_1 + \dots + z_{n-d} v_{n-d}$ mit gewissen Vektoren $v_1, \dots, v_{n-d}$. Insbesondere ist Φ^{-1} eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung, also Φ ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus.

Ferner gilt $\Phi(W \cap M) = W' \cap (U' \times \{0\})$. Die Inklusion „ $\subset$ “ folgt dabei direkt aus dem Begradigungslemma und für die Inklusion „ $\supset$ “ beobachten wir für $(y, 0)^T \in W'$ mit $y \in U'$, dass $\Phi^{-1}(y, 0) = \varphi^{-1}(y) \in W \cap U \subset W \cap M$.

Setzen wir also $F := \Pi \circ \Phi$, wobei Π die Projektion auf die letzten $n - d$ Komponenten bezeichne, so weist F die geforderten Eigenschaften auf.

„ $\Leftarrow$ “: Sei $p \in M$ und F wie angegeben. Gemäß Satz 9.7 ist dann $W \cap M = F^{-1}(\{0\})$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d . Damit gibt es eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi: U \rightarrow U'$ von $W \cap M$, wobei $U' \subset \mathbb{R}^d$ offen und U eine in $W \cap M$ offene Umgebung des Punktes p ist. Da W offen in $\mathbb{R}^n$ ist, ist U auch offen in M , so dass φ sogar eine Karte von M ist. Da $p \in M$ beliebig war, ist M damit eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d .

Blatt 10

Aufgabe 19) (Lokale Parametrisierungen)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d , $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\psi: U \rightarrow M$ eine injektive $\mathcal{C}^k$ -Abbildung derart, dass $D\psi(x)$ hat für alle $x \in U$ Rang d hat.

- (a) Zeigen Sie, dass $\psi(U) = S \cap M$ für eine offene Menge $S \subset \mathbb{R}^n$ gilt und $\psi^{-1}: \psi(U) \rightarrow U$ stetig ist.

Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\psi(U)$ offen in M ist. Hierfür können das Begradigungslemma und der lokale Umkehrsatz aus Analysis II hilfreich sein.

Bemerkung: Damit ist ψ^{-1} eine Karte von M und ψ entsprechend eine lokale Parametrisierung von M .

- (b) Muss $\psi^{-1}: \psi(U) \rightarrow U$ noch stetig sein, wenn auf die Voraussetzung verzichtet wird, dass M eine Mannigfaltigkeit ist?

Lösung: Zu (a): Es genügt zu zeigen, dass $\psi(U)$ offen in M ist. Analog ist dann für alle offenen $U' \subset U$ auch $\psi(U')$ offen in M (U durch U' ersetzen) und $\psi^{-1}: \psi(U) \rightarrow U$ somit wegen $\psi = (\psi^{-1})^{-1}$ stetig, vgl. Vortrag 2.

Sei also $p = \psi(q) \in \psi(U)$ mit $q \in U$. Da M nach Voraussetzung eine Mannigfaltigkeit ist, gibt es eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi: M \cap W \rightarrow \varphi(W \cap M) \subset \mathbb{R}^d$ mit einer offenen Umgebung $W \subset \mathbb{R}^n$ von p . Das Begradigungslemma liefert dann einen Diffeomorphismus $\Phi: \tilde{W} \rightarrow W'$ mit offenen Mengen $\tilde{W}, W' \subset \mathbb{R}^n$ mit $p \in \tilde{W} \subset W$ und $\Phi(x) = (\varphi(x), 0)^T$ für alle $x \in \tilde{W} \cap M$. Da ψ stetig ist, ist nun $\tilde{U} := \psi^{-1}(\tilde{W} \cap M) \subset U$ eine offene Umgebung von q . Mit der Projektion $\Pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ auf die ersten d Komponenten ist schließlich $\alpha := \varphi \circ \psi|_{\tilde{U}} = \Pi \circ \Phi \circ \psi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ eine injektive $\mathcal{C}^k$ -Abbildung.

Wir zeigen, dass $D\alpha(q): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ bijektiv ist. Dazu beobachten wir, dass das Bild von $D\psi(q)$ nach Voraussetzung Dimension d hat. Da Φ ein Diffeomorphismus ist, hat dann auch das Bild von $D(\Phi \circ \psi)(q)$ Dimension d . Nun ist das Bild von $D(\Phi \circ \psi)(q)$ nach Wahl von Φ aber eine Teilmenge von $\mathbb{R}^d \times \{0\}$, stimmt aus Dimensionsgründen also mit $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ überein. Für α bedeutet das, dass das Bild von $D\alpha(q)$ mit $\mathbb{R}^d$ übereinstimmt. Damit ist $D\alpha(q)$ surjektiv, also auch bijektiv.

Nach dem lokalen Umkehrsatz (siehe Analysis II) gibt es nun offene Umgebungen $\tilde{U} \subset U$ von q und $V \subset \mathbb{R}^d$ von $\alpha(q)$ derart, dass $\alpha|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus ist. Insbesondere ist dann $\psi(\tilde{U}) = \varphi^{-1}(V)$ offen in M mit $p \in \psi(\tilde{U}) \subset \psi(U)$, d.h. $\psi(\tilde{U})$ ist in M offene Umgebungen von p in $\psi(U)$. Da $p \in \psi(U)$ beliebig war, ist also $\psi(U)$ offen in M . Dies schließt den Beweis ab.

Zu (b): Ohne die Voraussetzung, dass M eine Mannigfaltigkeit ist, muss $\psi^{-1}: \psi(U) \rightarrow U$ nicht stetig sein. Betrachte dazu zum Beispiel die Abbildung $\psi: (-1, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\psi(t) = \begin{cases} (t, 0)^T, & t \in (-1, 0], \\ (\sin t, 1 - \cos t)^T, & t \in (0, 2\pi). \end{cases}$$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass ψ eine injektive $\mathcal{C}^1$ -Abbildung ist, für die $D\psi$ überall Rang 1 hat. Die Umkehrabbildung $\psi^{-1}: \psi((-1, 2\pi)) \rightarrow (-1, 2\pi)$ ist jedoch nicht stetig, denn für jede offene Umgebung $W \subset \mathbb{R}^2$ von $(0, 0)^T = \psi(0)$ enthält $\psi^{-1}(W \cap M)$ sowohl Punkte in der Nähe von 0, als auch Punkte in der Nähe von 2π (Skizze!). Tatsächlich ist $M := \psi((-1, 2\pi))$ auch keine Mannigfaltigkeit, wie man mit einer ähnlichen Beobachtung sieht.

Aufgabe 20) (Antisymmetrische Bilinearformen)

Für $\nu \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ sei $E_\nu := \{u \in \mathbb{R}^3 \mid u \cdot \nu = 0\}$ die Menge aller Vektoren in $\mathbb{R}^3$, die senkrecht auf ν stehen. Ferner sei $\Pi_\nu: \mathbb{R}^3 \rightarrow E_\nu$ mit $\Pi_\nu(u) = u - (u \cdot \nu / |\nu|) \nu / |\nu|$ die orthogonale Projektion auf E_ν . Hierbei stehen $\cdot$ und $|\cdot|$ für das euklidische Skalarprodukt und die zugehörige Norm in $\mathbb{R}^3$.

Wir definieren nun die alternierende 2-Form $B_\nu: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$B_\nu(u, w) := \det(\nu, \Pi_\nu(u), \Pi_\nu(w)).$$

(a) Veranschaulichen Sie $|B_\nu(u, w)|$ als Volumen einer geeigneten Menge $P \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$B_\nu(u, w) = \det(\nu, u, w) \quad \text{für alle } u, w \in \mathbb{R}^3.$$

(c) Bestimmen Sie eine Matrix $A_\nu \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ mit

$$B_\nu(u, w) = u \cdot (A_\nu w) \quad \text{für alle } u, w \in \mathbb{R}^3.$$

(d) Verifizieren Sie, dass $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 = B_{\epsilon_3}$, $\epsilon_1 \wedge \epsilon_3 = -B_{\epsilon_2}$ und $\epsilon_2 \wedge \epsilon_3 = B_{\epsilon_1}$, wobei $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ die duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ bezeichnen. Stellen Sie damit B_ν als Linearkombination der Formen $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2$, $\epsilon_1 \wedge \epsilon_3$ und $\epsilon_2 \wedge \epsilon_3$ dar.

(e) Schreiben Sie B_ν in der Form $B_\nu = \omega_1 \wedge \omega_2$ mit 1-Formen ω_1 und ω_2 .

Lösung: Zu (a): $|B_\nu(u, w)|$ entspricht dem Volumen des von den Vektoren ν , $\Pi_\nu(u)$ und $\Pi_\nu(w)$ aufgespannten Spats P . Dazu betrachten wir die lineare Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $e_1 \mapsto \nu$, $e_2 \mapsto \Pi_\nu(u)$ und $e_3 \mapsto \Pi_\nu(w)$. Dann gilt $P = \alpha(Q)$ mit $Q = (0, 1)^3$ und somit $\mu_3(P) = |\det \alpha| \mu_3(Q) = |\det \alpha| = |B_\nu(u, w)|$. Dies entspricht zudem dem um die Länge von ν skalierten Flächeninhalt des von den Vektoren $\Pi_\nu(u)$ und $\Pi_\nu(w)$ in E_ν aufgespannten Parallelogramms.

Zu (b): Wegen $u = \Pi_\nu(u) + (u \cdot \nu / |\nu|^2) \nu$ und $w = \Pi_\nu(w) + (w \cdot \nu / |\nu|^2) \nu$ folgt mit Rechenregeln für Determinanten

$$\begin{aligned} B_\nu(u, w) &= \det(\nu, \Pi_\nu(u), \Pi_\nu(w)) = \det\left(\nu, \Pi_\nu(u) + \left(\frac{u \cdot \nu}{|\nu|^2}\right) \nu, \Pi_\nu(w) + \left(\frac{w \cdot \nu}{|\nu|^2}\right) \nu\right) \\ &= \det(\nu, u, w). \end{aligned}$$

Zu (c): Mit Hilfe von Teil (b) berechnet man leicht $B_\nu(e_1, e_2) = \det(\nu, e_1, e_2) = \nu_3$ und analog $B_\nu(e_1, e_3) = -\nu_2$ und $B_\nu(e_2, e_3) = \nu_1$, wobei $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^T$. Damit ergibt sich $A_\nu \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zu

$$A_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \nu_3 & -\nu_2 \\ -\nu_3 & 0 & \nu_1 \\ \nu_2 & -\nu_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu (d): Mit der Definition des Dachprodukts erhalten wir

$$(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2)(u, w) = \det \begin{pmatrix} u_1 & w_1 \\ u_2 & w_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & u_1 & w_1 \\ 0 & u_2 & w_2 \\ 1 & u_3 & w_3 \end{pmatrix} = B_{e_3}(u, w).$$

Die anderen beiden Identitäten $(\epsilon_1 \wedge \epsilon_3)(u, w) = -B_{e_2}(u, w)$ und $(\epsilon_2 \wedge \epsilon_3)(u, w) = B_{e_1}(u, w)$ sieht man analog. Da $\nu \mapsto B_\nu$ nach Teil (b) linear ist, erhalten wir so

$$B_\nu = \nu_1 B_{e_1} + \nu_2 B_{e_2} + \nu_3 B_{e_3} = \nu_1 \epsilon_2 \wedge \epsilon_3 - \nu_2 \epsilon_1 \wedge \epsilon_3 + \nu_3 \epsilon_1 \wedge \epsilon_2.$$

Zu (e): Wir ergänzen ν zu einer Basis (f_1, f_2, ν) von $\mathbb{R}^3$ mit $\det(\nu, f_1, f_2) = 1$. Sei $(\omega_1, \omega_2, \eta)$ die zugehörige duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$. Dann gilt $B_\nu = \omega_1 \wedge \omega_2$. Da beide Seiten multilinear und alternierend sind, genügt es dies auf einer Basis nachzuweisen. Zum Beispiel

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(f_1, f_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 = \det(\nu, f_1, f_2) = B_\nu(f_1, f_2)$$

und

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(f_1, \nu) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = \det(\nu, f_1, \nu) = B_\nu(f_1, \nu).$$

Für die anderen Kombinationen (f_2, ν) , (f_1, f_1) , (f_2, f_2) und (ν, ν) verschwinden beide Seiten analog.

Blatt 11

Aufgabe 21) (Rechnen mit Differentialformen)

- (a) Sei $\omega_1 = dx_2 \wedge dx_3$, $\omega_2 = x_1 dx_3 \wedge dx_2$ und $\omega_3 = dx_3 \wedge dr^2$ mit $r^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Seien ferner $p = (2, 0, 0)^T$, $\xi = (1, 1, 1)^T$ und $\eta = (1, 2, 3)^T$. Berechnen Sie

$$\omega_j(p)(\xi, \eta)$$

für $j = 1, 2, 3$.

- (b) Sei $\omega_1 = 2x_1^2 dx_1 + (x_1 + x_2) dx_2$ und $\omega_2 = x_1^3 dx_1 + x_2 x_3 dx_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3$. Berechnen Sie die äußeren Ableitungen $d\omega_1$, $d\omega_2$ und $d(\omega_1 \wedge \omega_2)$ und verifizieren Sie so die Identität $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = (d\omega_1) \wedge \omega_2 - \omega_1 \wedge (d\omega_2)$.

Lösung: Zu (a): Es gilt

$$\omega_3 = dx_3 \wedge d(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -2(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) \wedge dx_3.$$

Damit erhalten wir

$$\omega_1(p)(\xi, \eta) = (dx_2 \wedge dx_3)(\xi, \eta) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 1$$

$$\omega_2(p)(\xi, \eta) = 2(dx_3 \wedge dx_2)(\xi, \eta) = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$\omega_3(p)(\xi, \eta) = -(2(dx_1 + 0 dx_2) \wedge dx_3)(\xi, \eta) = -4(dx_1 \wedge dx_3)(\xi, \eta) = -4 \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = -8.$$

Zu (b): Wir erhalten die Ableitungen

$$d\omega_1 = d(2x_1^2 dx_1 + (x_1 + x_2) dx_2) = dx_1 \wedge dx_2$$

$$d\omega_2 = x_2 dx_3 \wedge dx_2 - (2x_1 dx_1 + 2x_2 dx_2) \wedge dx_3 = -2x_1 dx_1 \wedge dx_3 - 3x_2 dx_2 \wedge dx_3.$$

Mit

$$\begin{aligned} \omega_1 \wedge \omega_2 &= (2x_1^2 dx_1 + (x_1 + x_2) dx_2) \wedge (x_1^3 dx_1 + x_2 x_3 dx_2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_3) \\ &= (2x_1^2 x_2 x_3 - x_1^3 (x_1 + x_2)) dx_1 \wedge dx_2 - 2x_1^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad - (x_1 + x_2) (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} d(\omega_1 \wedge \omega_2) &= 2x_1^2 x_2 dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 - 4x_1^2 x_2 dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &\quad - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1(x_1 + x_2)) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (6x_1^2 x_2 - 3x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1 x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Betrachte nun

$$(d\omega_1) \wedge \omega_2 = (dx_1 \wedge dx_2) \wedge \omega_2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

und

$$\begin{aligned}\omega_1 \wedge (d\omega_2) &= (2x_1^2 dx_1 + (x_1 + x_2)dx_2) \wedge (-2x_1 dx_1 \wedge dx_3 - 3x_2 dx_2 \wedge dx_3) \\ &= -6x_1^2 x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - 2x_1(x_1 + x_2)dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 \\ &= (-6x_1^2 x_2 + 2x_1(x_1 + x_2))dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.\end{aligned}$$

Die gewünschte Identität folgt nun sofort durch vergleichen der beiden Seiten.

Aufgabe 22) (Geschlossene und exakte Differentialformen)

- (a) Untersuchen Sie, ob die 1-Form $dx_1 + 2x_2 dx_2 + 3x_3^2 dx_3$ exakt ist.
- (b) Finden Sie für die 3-Form $\omega = 12x_1^2 x_2^3 x_3^4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$ eine 2-Form ϕ mit $\omega = d\phi$.
- (c) Finden Sie eine 1-Form ϕ mit $d\phi = x_3 dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3$.

Lösung: **Zu (a):** Suche ein $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad}f(x_1, x_2, x_3) = (1, 2x_2, 3x_3^2)^T$, z.B. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2^2 + x_3^3$. Dann gilt $df = \omega$, also ist ω exakt.

Zu (b): Ansatz:

$$\phi = u dx_1 \wedge dx_2 + v dx_1 \wedge dx_3 + w dx_2 \wedge dx_3$$

Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}d\phi &= \partial_3 u dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 + \partial_2 v dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \partial_1 w dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\partial_3 u - \partial_2 v + \partial_1 w) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \stackrel{!}{=} \omega,\end{aligned}$$

also $12x_1^2 x_2^3 x_3^4 \stackrel{!}{=} \text{div}(w, -v, u)^T$, z.B. $u = v = 0$ und $w = \int 12x_1^2 x_2^3 x_3^4 dx_1$.

Also z.B. $\phi = 4x_1^3 x_2^3 x_3^4 dx_2 \wedge dx_3$.

Zu (c): Betrachte

$$d\phi \stackrel{!}{=} x_3 dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_3 = (x_3 dx_1 + dx_2) \wedge dx_3 = d(x_3 x_1 + x_2) \wedge dx_3$$

mit $\phi = (x_3 x_1 + x_2) dx_3$.

Blatt 12

Aufgabe 23) (Diffeomorphismen von Mannigfaltigkeiten)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d und $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass dann $g(M)$ ebenfalls eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d ist.

Lösung: Sei $p = g(q) \in g(M)$ mit $q \in M$. Da M eine Mannigfaltigkeit ist, existiert eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi: W \cap M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ mit $q \in W \subset \mathbb{R}^n$ offen und U' offen. Setze $\tilde{W} := g(W)$ mit $p \in \tilde{W}$ und $\tilde{W}$ offen, da g ein Diffeomorphismus und somit auch ein Homöomorphismus ist. Definiere dann $\tilde{\varphi} := \varphi \circ g^{-1}|_{\tilde{W} \cap g(M)}: \tilde{W} \cap g(M) \rightarrow U'$. Wegen $\tilde{\varphi}^{-1} = g \circ \varphi^{-1}: U' \rightarrow \tilde{W} \cap g(M)$ und da g ein $\mathcal{C}^k$ -Diffeomorphismus und φ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte ist, ist dann $\tilde{\varphi}$ eine $\mathcal{C}^k$ -Karte von $g(M)$ um p , wobei $D\tilde{\varphi}^{-1}$ in allen Punkten von U' wieder Rang d hat. Da $p \in g(M)$ beliebig gewählt war, ist $g(M)$ somit eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d .

Aufgabe 24) (Das Möbiusband)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(r, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi)(1 + r \cos(\frac{\varphi}{2})) \\ \sin(\varphi)(1 + r \cos(\frac{\varphi}{2})) \\ r \sin(\frac{\varphi}{2}) \end{pmatrix}.$$

Das Möbiusband $M \subset \mathbb{R}^3$ ist dann gegeben durch

$$M := \left\{ f(r, \varphi) \mid r \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \varphi \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (a) Zeigen Sie durch Angabe von lokalen Parametrisierungen, dass M eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension 2 ist. Begründen Sie insbesondere die Stetigkeit der jeweiligen Inversen!
- (b) Sei $\tilde{M} := f(\{0\} \times (0, 2\pi)) \subset M$. Bestimmen Sie eine von $p \in \tilde{M}$ abhängige Basis $(e_1^{(p)}, e_2^{(p)})$ des Tangentialraums $T_p(M)$.
- (c) Durch

$$\nu: \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \nu(p) := \frac{e_1^{(p)} \times e_2^{(p)}}{|e_1^{(p)} \times e_2^{(p)}|}$$

ist in jedem Punkt $p \in \tilde{M}$ ein auf $T_p(M)$ senkrechter Vektor gegeben.

Zeigen Sie, dass ν nicht zu einem stetigen Einheitsnormalenvektorfeld von M im Sinne von Definition 12.19 des Skriptes fortgesetzt werden kann.

- (d) Folgern Sie aus (c) noch einmal, dass M nicht orientierbar ist. Verwenden Sie hierfür, dass es in einer orientierbaren Mannigfaltigkeit ein stetiges Einheitsnormalenvektorfeld gibt, vgl. Satz 12.23 des Skriptes.

Lösung: Zu (a): Betrachte die Parametrisierungen

$$\psi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_j(r, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos \varphi (1 + r \cos \frac{\varphi}{2}) \\ \sin \varphi (1 + r \cos \frac{\varphi}{2}) \\ r \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \in M, \quad j = 1, 2,$$

mit $U_1 = (-1/2, 1/2) \times (0, 2\pi)$ und $U_2 = (-1/2, 1/2) \times (-\pi, \pi)$. Dann gilt $\psi_j \in \mathcal{C}^k$ und wegen $f(r, 0) = (1 + r, 0, 0)^T$, $f(r, 2\pi) = (1 - r, 0, 0)^T$, $f(r, \pi) = (-1, 0, r)^T$ und $f(r, -\pi) = (-1, 0, -r)^T$ gilt

$$\begin{aligned}\text{Bild } \psi_1 &= M \setminus \left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right] \times \{0\} \times \{0\} \right)^T, \\ \text{Bild } \psi_2 &= M \setminus \left(\{-1\} \times \{0\} \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \right)^T,\end{aligned}$$

so dass beide Bilder offen in M sind und $M = \text{Bild } \psi_1 \cup \text{Bild } \psi_2$ gilt. Mit diesen Parametrisierungen gilt

$$D\psi_j(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \varphi (1 + r \cos \frac{\varphi}{2}) - \frac{r}{2} \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} & \cos \varphi (1 + r \cos \frac{\varphi}{2}) - \frac{r}{2} \sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \frac{r}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A(r, \varphi) \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \frac{r}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned}\det A(r, \varphi) &= \cos^2 \varphi \cos \frac{\varphi}{2} (1 + r \cos \frac{\varphi}{2}) - \frac{r}{2} \sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &\quad + \sin^2 \varphi \cos \frac{\varphi}{2} (1 + r \cos \frac{\varphi}{2}) + \frac{r}{2} \sin \varphi \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= \cos \frac{\varphi}{2} \underbrace{(1 + \cos \frac{\varphi}{2})}_{>0} \neq 0 \quad \text{falls } \varphi \neq \pi.\end{aligned}$$

Außerdem ist

$$D\psi_1(r, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{r}{2} \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit hat $D\psi_j(r, \varphi)$ stets Rang 2.

Wir zeigen jetzt, dass ψ_j injektiv ist. Sei dazu $\psi_j(r_1, \varphi_1) = \psi_j(r_2, \varphi_2)$. Für $x^2 + y^2$ auf beiden Seiten gilt dann $(1 + r_1 \cos \frac{\varphi_1}{2})^2 = (1 + r_2 \cos \frac{\varphi_2}{2})^2$, und da das innere beider Quadrate positiv ist, folgt daraus $1 + r_1 \cos \frac{\varphi_1}{2} = 1 + r_2 \cos \frac{\varphi_2}{2}$. Somit sind die zweiten Faktoren der x und y -Koordinaten auf beiden Seiten gleich, und es folgt $\cos \varphi_1 = \cos \varphi_2$ sowie $\sin \varphi_1 = \sin \varphi_2$. Aus der Eindeutigkeit der Polarkoordinaten folgt dann $\varphi_1 = \varphi_2$ und über $1 + r_1 \cos \frac{\varphi_1}{2} = 1 + r_2 \cos \frac{\varphi_2}{2}$ somit auch $r_1 = r_2$.

Jetzt zu den Inversen der Parametrisierungen:

Zu $p = (x, y, z)^T \in \psi_j(U_j)$ gibt es genau ein $\varphi \in (0, 2\pi)$ bzw. $\varphi \in (-\pi, \pi)$ mit $\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{1 + r \cos \frac{\varphi}{2}}$ und $\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{1 + r \cos \frac{\varphi}{2}}$. Dabei hängt φ stetig von x und y ab, was aus der Stetigkeit der Umkehrabbildung für Polarkoordinaten folgt.

$r = r(x, y, z)$ lässt sich nun wie folgt bestimmen:

j=1: $\sin \frac{\varphi}{2} \neq 0$ und somit ist $r = \frac{z}{\sin \frac{\varphi}{2}}$ stetig in (x, y, z) , da $\varphi = \varphi(x, y)$ stetig ist.

j=2: $\cos \frac{\varphi}{2} \neq 0$ und somit ist $r = \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - 1}{\cos \frac{\varphi}{2}}$ stetig in (x, y, z) .

Insgesamt ist somit ψ_j^{-1} stetig.

Zu (b): $\tilde{M}$ liegt in Bild ψ_1 . Ferner gilt $\psi_1(0, \varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$ und

$$D\psi_1(0, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} & -\sin \varphi \\ \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} & \cos \varphi \\ \sin \frac{\varphi}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Also bilden für $p = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T \in \tilde{M}$ mit $\varphi \in (0, 2\pi)$ die Vektoren

$$e_1^{(p)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \varphi \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad e_2^{(p)} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von $T_p M$. Um die Basis in Abhängigkeit von (x, y, z) zu schreiben, muss $\cos \frac{\varphi}{2}$ in Abhängigkeit von $x = \cos \varphi$ und $y = \sin \varphi$ berechnet werden. Es gilt $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4}(2 + 2 \cos \varphi)$, und für $\varphi \in (0, 2\pi)$ gilt $\cos \frac{\varphi}{2} \geq 0$ genau dann wenn $\sin \varphi \geq 0$. Damit besteht die Basis für $p = (x, y, 0) \in \tilde{M}$ aus den Vektoren

$$e_1^{(p)} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}(\pm\sqrt{2+2x}) \\ \frac{y}{2}(\pm\sqrt{2+2x}) \\ \sqrt{1-\frac{1}{2}(1+x)} \end{pmatrix}, \quad e_2^{(p)} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei die "+"-Version für $y \geq 0$ und die "-"-Version für $y < 0$ gilt.

Zu (c): Der Vektor

$$e_1^{(p)} \times e_2^{(p)} = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\varphi}{2} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \sin \frac{\varphi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

hat Norm 1, somit ist $\nu(p) = e_1^{(p)} \times e_2^{(p)}$.

Es gilt

$$\lim_{\varphi \searrow 0} \nu(\psi_1(0, \varphi)) = (0, 0, 1)^T \neq (0, 0, -1)^T = \lim_{\varphi \nearrow 2\pi} \nu(\psi_1(0, \varphi)),$$

aber

$$\lim_{\varphi \searrow 0} \psi_1(0, \varphi) = (1, 0, 0)^T = \lim_{\varphi \nearrow 2\pi} \psi_1(0, \varphi),$$

und somit folgt die Behauptung.

Zu (d): Angenommen, M wäre orientierbar. Nach der Vorlesung existiert dann ein $\mathcal{C}^{k-1}$ -Einheitsnormalenvektorfeld μ auf M . Da $\dim T_p M = 2$ gilt, ν und μ stetig sind und $\nu(p)$ und $\mu(p)$ beide für alle $p \in \tilde{M}$ senkrecht auf $T_p M$ stehen, muss $\nu = \mu|_{\tilde{M}}$ oder $\nu = -\mu|_{\tilde{M}}$ gelten. Da $\pm\mu|_{\tilde{M}}$ aber offensichtlich stetig auf M fortsetzbar ist, nämlich zu $\pm\mu$, ist dies ein Widerspruch zu (c).

Blatt 13

Aufgabe 25) (Das Tangentialbündel)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d . Das *Tangentialbündel* TM von M ist definiert durch

$$TM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Zeigen Sie, dass TM eine $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit der Dimension $2d$ ist.

Tipp: Man konstruiere aus Karten von M entsprechende Karten von TM .

Bemerkung: Ebenso kann man zeigen, dass das *Kotangentialbündel*

$$T^*M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p^* M$$

eine $\mathcal{C}^{k-1}$ -Mannigfaltigkeit der Dimension $2d$ ist.

Lösung: Sei $(p, v)^T \in TM$. Dann gibt es eine $\mathcal{C}^k$ -Karte $\varphi: W \cap M \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^d$ mit W offen und $p \in W$ und eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung $F: W \rightarrow \mathbb{R}^d$ mit $F|_{W \cap M} = \varphi|_{W \cap M}$ (Fortsetzung der Karte φ ; dazu im Zweifel W verkleinern).

Wir definieren $\phi: (W \times \mathbb{R}^n) \cap TM \rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{2d}$ durch $\phi(q, u) := (\varphi(q), w)^T$ mit $w = (T_q \varphi)(u) = (DF(q))(u)$, also $(D\varphi^{-1}(\varphi(q)))(w) = u$.

Dabei gilt $(W \times \mathbb{R}^n) \cap TM = \bigcup_{q \in W \cap M} \{q\} \times T_q M$, also

$$\phi((W \times \mathbb{R}^n) \cap TM) = \bigcup_{q \in W \cap M} \phi(\{q\} \times T_q M) = \bigcup_{q \in W \cap M} \{\varphi(q)\} \times \mathbb{R}^d = U' \times \mathbb{R}^d,$$

wobei die vorletzte Gleichung gilt, da $T_q \varphi: T_q M \rightarrow \mathbb{R}^d$ ein Isomorphismus ist.

Ferner: $\phi: (W \times \mathbb{R}^d) \cap TM \rightarrow U' \times \mathbb{R}^d$ ist bijektiv mit $\phi^{-1}(p', v') = (\varphi^{-1}(p'), D\varphi^{-1}(p')(v'))^T$. Offenbar ist ϕ stetig und $\phi^{-1}: U' \times \mathbb{R}^d \rightarrow (W \times \mathbb{R}^d) \cap TM$ eine $\mathcal{C}^{k-1}$ -Abbildung, da φ^{-1} eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung ist. Außerdem hat

$$D\phi^{-1}(p', v') = \begin{pmatrix} D\varphi^{-1}(p') & 0 \\ * & D\varphi^{-1}(p') \end{pmatrix}$$

Rang $2d$, da $D\varphi^{-1}(p')$ Rang d hat. Also ist ϕ eine $\mathcal{C}^{k-1}$ -Karte von TM um (p, v) .

Aufgabe 26) (Zurückziehen von Differentialformen)

Seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi: U \rightarrow V$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\Phi^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = (\det D\Phi) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Führen Sie den Beweis dieser Aussage aus dem Skript (Lemma 12.11) aus mit einer ausführlichen Begründung der einzelnen Schritte. Erstellen Sie eine Liste der verwendeten Objekte und geben Sie an, wo diese definiert sind.

Lösung: Seien $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n)^T: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$, $p \in U$ und $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ mit $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$, wobei 1 an j -te Stelle steht. Sei ferner $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in (\mathbb{R}^n)^*$ die zu $e_1, \dots, e_n$ duale Basis, d.h. $\varepsilon_j(e_k) = \delta_{j,k}$.

Nun ist $D\Phi(p): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Ableitung von Φ in p mit Jabobi-Matrix $(\partial_j \Phi_k(p))_{k,j}$. Ferner seien

$$\begin{aligned} \Phi^*: (V \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*) &\rightarrow (U \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*), \\ (D\Phi(p))^*: \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* &= \Lambda^n(T_{\Phi(p)}V)^* \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^* = \Lambda^n(T_p U)^*, \end{aligned}$$

und sei $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n: U/V \rightarrow \Lambda^n(\mathbb{R}^n)^*$ die Top-Form auf U bzw. V .

Es gilt

$$\begin{aligned} (\Phi^* dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(p)(e_1, \dots, e_n) &\stackrel{\text{Def von } \Phi^*}{=} ((D\Phi(p))^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(\Phi(p)))(e_1, \dots, e_n) \\ &= ((D\Phi(p))^*(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n))(e_1, \dots, e_n) \\ &\stackrel{\text{Def. von } (D\Phi(p))^*}{=} \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n(D\Phi(p)e_1, \dots, D\Phi(p)e_n) \\ &= \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n(\partial_1 \Phi(p), \dots, \partial_n \Phi(p)) \\ &\stackrel{\text{Def von } \text{Dachprod.}}{=} \det \begin{pmatrix} \partial_1 \Phi_1(p) & \dots & \partial_n \Phi_1(p) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 \Phi_n(p) & \dots & \partial_n \Phi_n(p) \end{pmatrix} \\ &= \det((\partial_j \Phi_k(p))_{k,j}) = \det D\Phi(p) \cdot 1 \\ &= (\det D\Phi)(p) \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_n(e_1, \dots, e_n) \\ &= ((\det D\Phi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)(p)(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

Dann folgt die Behauptung aus der Eigenschaft, dass die Formen multilinear und alternierend sind.

Blatt 14

Aufgabe 27) (Rotationskörper)

Sei $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Es bezeichne $V_f \subset \mathbb{R}^3$ die Menge, die durch Rotation des Subgraphen

$$\Gamma_f = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (1, \infty), y = 0, 0 < z < f(x)\}$$

um die x -Achse entsteht. Ferner bezeichne $M_f = \partial V_f \setminus (\{1\} \times \mathbb{R}^2)$ die zugehörige Mantelfläche, vgl. Vortrag 18 von Blatt 9.

- (a) Bestimmen Sie ein Einheitsnormalenvektorfeld ν auf M_f . Zeigen Sie ferner, dass V_f endliches Volumen hat, wenn das Integral

$$\int_{M_f} \det(\nu, \cdot, \cdot)$$

einen endlichen Wert hat.

Bemerkung: Das obige Integral kann als (orientierter) Flächeninhalt der Mantelfläche M_f interpretiert werden. Damit hat der oben beschriebene Rotationskörper V_f also endliches Volumen, wenn seine Oberfläche endlich ist.

- (b) Sei speziell $f(x) = 1/x$ für $x > 1$. Zeigen Sie, dass V_f endliches Volumen hat, aber das Integral aus (a) keinen endlichen Wert hat.

Lösung: Zu (a): Analog zu Vortrag 18: $M_f = F^{-1}(\{0\})$ mit $F: (1, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x, y, z) = y^2 + z^2 - f(x)^2$. Ferner gilt $\nabla F(x, y, z) = (-2f(x)f'(x), 2y, 2z)^T$ mit $\|\nabla F(x, y, z)\|^2 = 4(y^2 + z^2 + f(x)^2 f'(x)^2) = 4f(x)^2(1 + f'(x)^2)$ für $(x, y, z)^T \in M_f$. Damit erhalten wir das Einheitsnormalenvektorfeld

$$\nu(x, y, z) = \frac{\nabla F(x, y, z)}{\|\nabla F(x, y, z)\|} = \left(-\frac{f'(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}}, \frac{y}{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}, \frac{z}{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}} \right)^T.$$

Betrachte nun die lokalen Parametrisierungen

$$\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \psi_j(x, \varphi) = (x, f(x) \cos \varphi, f(x) \sin \varphi)^T$$

mit $U_1 = (1, \infty) \times (0, 2\pi)$, $U_2 = (1, \infty) \times (-\pi, \pi)$. Hierbei gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 \psi_1(x, \varphi) \times \partial_2 \psi_1(x, \varphi) &= \dots = (f(x)f'(x), -f(x) \cos \varphi, -f(x) \sin \varphi)^T \\ &= -\|\partial_1 \psi_1(x, \varphi) \times \partial_2 \psi_1(x, \varphi)\| \cdot \nu \circ \psi_1(x, \varphi). \end{aligned}$$

Nun ist $\psi_2^{-1}(M_f \setminus \text{Bild } \psi_1) = (1, \infty) \times \{0\}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^2$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{M_f} \det(\nu, \cdot, \cdot) &= \int_{\psi_1(U_1)} \det(\nu, \cdot, \cdot) = \int_{U_1} \psi_1^*(\det(\nu, \cdot, \cdot)) \\ &= \int_{(1, \infty) \times (0, 2\pi)} \langle \nu \circ \psi_1(x, \varphi), \partial_1 \psi_1(x, \varphi) \times \partial_2 \psi_1(x, \varphi) \rangle d(x, \varphi) \\ &= - \int_{(1, \infty) \times (0, 2\pi)} \|\partial_1 \psi_1(x, \varphi) \times \partial_2 \psi_1(x, \varphi)\| d(x, \varphi) \\ &= - \int_{(1, \infty) \times (0, 2\pi)} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} d(x, \varphi) = -2\pi \int_1^\infty f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir Vortrag 25 bzw. 26 und in der letzten Gleichheit Fubini benutzt. Nun gilt

$$\begin{aligned} |f(x)^2 - f(1)^2| &= \left| \int_1^x \frac{d}{dt} f(t)^2 dt \right| \leq \int_1^x 2f(t)|f'(t)| dt \\ &\leq 2 \int_1^\infty f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = -\frac{1}{\pi} \int_{M_f} \det(\nu, \cdot, \cdot) < \infty, \end{aligned}$$

also

$$c := \sup_{x \in (1, \infty)} f(x) < \infty.$$

Daraus folgt mit dem Prinzip von Cavalieri, dass

$$\begin{aligned}\mu_3(V_f) &= \int_1^\infty \mu_2(B_{f(x)}(0)) \, dx = \pi \int_1^\infty f(x)^2 \, dx \leq \pi c \int_1^\infty f(x) \, dx \\ &\leq \frac{c}{2} \cdot 2\pi \int_1^\infty f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = -\frac{c}{2} \int_{M_f} \det(\nu, \cdot, \cdot) < \infty,\end{aligned}$$

womit die Behauptung gezeigt ist.

Zu (b): Dem Beweis von (a) folgend gilt $\mu_3(V_f) = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx = \pi < \infty$, und mit $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ ferner

$$-\int_{M_f} \det(\nu, \cdot, \cdot) = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \infty.$$

Aufgabe 28) (Die Gramsche Determinante)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine $\mathcal{C}^k$ -Mannigfaltigkeit der Dimension d . Für eine lokale Parametrisierung $\psi: U \rightarrow M$ von M heißt die Funktion $g_\psi: U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g_\psi(q) := \det((D\psi(q))^T D\psi(q)) = \det((\langle \partial_j \psi(q), \partial_k \psi(q) \rangle)_{j,k})$$

die zu ψ gehörige *Gramsche Determinante*.

- (a) Zeigen Sie im Fall $n = 3$ und $d = 2$, dass $g_\psi(q) = \|\partial_1 \psi(q) \times \partial_2 \psi(q)\|^2$ gilt.
- (b) (Graphenflächen) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^k$ -Abbildung. Sei ferner $M := \{(q, f(q))^T \mid q \in U\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ die zugehörige Graphenfläche mit globaler Parametrisierung $\psi: U \rightarrow M$, $\psi(q) = (q, f(q))^T$. Zeigen Sie:

$$g_\psi(q) = 1 + \|\nabla f(q)\|^2.$$

Tipp: Man zeige zunächst $\det(E_k + uu^T) = 1 + u^T u$ für $u \in \mathbb{R}^k$ mit der $k \times k$ -Einheitsmatrix E_k . Dazu schreibe man

$$\begin{pmatrix} E_k & 0 \\ u^T & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k + uu^T & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ -u^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & u \\ 0 & 1 + u^T u \end{pmatrix}.$$

- (c) (Rotationsflächen) Sei M_f die Mantelfläche aus Aufgabe 27a). Bestimmen Sie die Gramsche Determinante zu einer von Ihnen gewählten lokalen Parametrisierung von M_f .

Bemerkung: Die Gramsche Determinante spielt eine zentrale Rolle bei der Integration auf Mannigfaltigkeiten.

Lösung: Zu (a): Berechne

$$\begin{aligned} g_\psi(q) &= \det \left(\begin{pmatrix} \partial_1 \psi(q)^T \\ \partial_2 \psi(q)^T \end{pmatrix} (\partial_1 \psi(q) \quad \partial_2 \psi(q)) \right) = \det \begin{pmatrix} \|\partial_1 \psi(q)\|^2 & \partial_1 \psi(q)^T \partial_2 \psi(q) \\ \partial_2 \psi(q)^T \partial_1 \psi(q) & \|\partial_2 \psi(q)\|^2 \end{pmatrix} \\ &= \|\partial_1 \psi(q)\|^2 \|\partial_2 \psi(q)\|^2 - (\partial_1 \psi(q)^T \partial_2 \psi(q))^2 = \|\partial_1 \psi(q) \times \partial_2 \psi(q)\|^2. \end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Gleichheit die Identität $\|u\|^2 \|v\|^2 - (u^T v)^2 = \|u \times v\|^2$ benutzt. Diese lässt sich leicht durch Ausschreiben beider Seiten verifizieren.

Zu (b): Die Matrixgleichung aus dem Tipp folgt durch direktes Nachrechnen. Anwenden der Determinante auf beide Seiten dieser Gleichung liefert die Identität $\det(E_k + uu^T) = 1 + u^T u$, da $\det E_k = 1$ ist. Nun gilt

$$D\psi(q) = \begin{pmatrix} E_k \\ \nabla f(q)^T \end{pmatrix},$$

also

$$D\psi(q)^T D\psi(q) = (E_k \quad \nabla f(q)) \begin{pmatrix} E_k \\ \nabla f(q)^T \end{pmatrix} = E_k + \nabla f(q) \nabla f(q)^T.$$

Die obige Identität mit $u = \nabla f(q)$ liefert dann

$$g_\psi(q) = 1 + \|\nabla f(q)\|^2,$$

also die zu zeigende Behauptung.

Zu (c): Für ψ_1 aus Aufgabe 27a) folgt mit Teil (a), dass

$$g_{\psi_1}(q) = \|\partial_1 \psi_1(q) \times \partial_2 \psi_1(q)\|^2 = f(x)^2 (1 + f'(x)^2).$$

Hierbei haben wir die Identität $\|\partial_1 \psi_1(q) \times \partial_2 \psi_1(q)\| = f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}$ aus den Berechnungen zu Aufgabe 27 (a) verwendet.