technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

4. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Vortrag 5) (Approximation von außen)

Beweisen Sie für $X \subset \mathbb{R}^d$ die Äquivalenz der beiden folgenden Aussagen:

(i) X ist Lebesgue-messbar.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine offene Menge U mit $X \subset U$ und $\mu^*(U \setminus X) < \varepsilon$.

Vortrag 6) (Die Borelsche σ-Algebra)

Wir schreiben $\mathcal{H}$ für das Mengensystem der halboffenen Quader in $\mathbb{R}^d$ und $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{K}$ für das System der offenen, abgeschlossenen bzw. kompakten Teilmengen des $\mathbb{R}^d$.
In der Vorlesung wurde die σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ der Borelschen Mengen eingeführt als die vom Mengensystem $\mathcal{T}$ erzeugte σ-Algebra, d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Zeigen Sie:

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{A}(\mathcal{H}) = \mathcal{A}(\mathcal{C}) = \mathcal{A}(\mathcal{K}).$$

Vortrag 7) (Translationsinvarianz des Lebesgueschen Maßes)

Für $b \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $T_b\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $x \mapsto x + b$, die Translation um b. Zeigen Sie:

(a) Für alle $A \subset \mathbb{R}^d$ und $b \in \mathbb{R}^d$ gilt $\mu^*(T_b(A)) = \mu^*(A)$.

(b) $A \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann Lebesgue-messbar, wenn $T_b(A)$ Lebesgue-messbar ist.

Vortrag 8) (Das Lebesguesche Maß unter linearen Abbildungen)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für Quader $Q \subset \mathbb{R}^d$ die Ungleichung

$$\mu^*(A(Q)) \leq |\det(A)| \cdot \mu(Q)$$

gilt, wenn $A \in M_d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{d \times d}$ eine invertierbare Diagonalmatrix oder eine elementare Scherung ist. Benutzen Sie dies, um die folgende Aussage zu zeigen:
Für beliebiges $A \in M_d(\mathbb{R})$ und $X \subset \mathbb{R}^d$ gilt

$$\mu^*(A(X)) = |\det(A)| \cdot \mu^*(X)\,,$$

und $A(X)$ ist Lebesgue-messbar, falls X Lebesgue-messbar ist.