

Theoretische Physik I

PD Dr. Ute Löw
ausgearbeitet von Alexander Sandrock

WiSe 2013/14

Inhaltsverzeichnis

I	Mechanik	5
1	Newtonsche Mechanik und Grundbegriffe der Mechanik	6
1.1	Allgemeine Vorbemerkungen	6
1.2	Die Newtonschen Axiome	7
1.3	Der Begriff der Arbeit	12
1.4	Potentiale und konservative Kräfte	17
1.5	Der Drehimpuls	21
1.6	Mechanik eines Systems von Teilchen	22
2	Das Keplerproblem	25
3	Das Hamiltonsche Prinzip	38
3.1	Generalisierte Koordinaten	38
3.2	Das Hamiltonsche Prinzip	39
3.2.1	Generalisierte Impulse	42
4	Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen	50
	Mathematischer Einschub: Der ε-Tensor und das Kronecker-δ	56
5	Der starre Körper	59
6	Hydrodynamik	72
6.1	Allgemeine Bemerkungen	72
6.2	Kontinuitätsgleichung	73
6.3	Euler-Gleichung	74
6.4	Navier-Stokes-Gleichung	76
6.5	Reynolds-Zahlen	84
II	Elektrodynamik	89
1	Elektrostatik	90
1.1	Grundlegende Prinzipien	90
1.2	Elektrisches Feld	91
1.3	Das Gaußsche Gesetz	92
	Beispiel: Feld einer geladenen Kugel	94
	Beispiel: Feld eines unendlich langen Drahtes	94
1.4	Das elektrostatische Potential	95

<i>INHALTSVERZEICHNIS</i>	3
1.5 Die Multipolentwicklung	96
1.6 Randwertprobleme	98
2 Magnetostatik	99
2.1 Eichfreiheit	104
3 Die Maxwell-Gleichungen	105
4 Elektromagnetische Wellen	110
4.1 Energieerhaltung in der Elektrodynamik	110
4.2 Eigenschaften der elektromagnetischen Wellen	112

Literaturverzeichnis

- [1] Herbert Goldstein: Klassische Mechanik, Akademische Verlagsgesellschaft.
- [2] Herbert Goldstein, Charles P. Poole, John L. Safko Sr.: Klassische Mechanik, Wiley-VCH.
- [3] W. Nolting: Grundkurs Theoretische Physik 2 (Analytische Mechanik), Springer.
- [4] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: Lectures on Physics I, Addison Wesley.
- [5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz: Theoretische Physik I, Akademie Verlag.
- [6] Schaum Outline Series, Mechanik.
- [7] Steve Weinberg: Can Science explain Everything, Anything? in Steve Weinberg: Lake Views, This World and the Universe, The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge (Massachusetts), London (England).
- [8] T. W. B. Kibble: Classical Mechanics, Longman Scientific & Technical
- [9] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics, John Wiley & Sons Ltd.

Teil I
Mechanik

Kapitel 1

Newton'sche Mechanik und Grundbegriffe der Mechanik

1.1 Allgemeine Vorbemerkungen

Das Thema des ersten Teiles der Vorlesung ist die *theoretische klassische, nicht-relativistische Mechanik*.

Klassisch bedeutet hier im Gegensatz zur Quantenmechanik, d. h. wir beschäftigen uns mit makroskopischen Teilchen mit großen Abständen x verglichen mit atomaren Größenordnungen, die beispielsweise durch den Bohrschen Atomradius a_0 gekennzeichnet sind.

$$x \gg a_0,$$
$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e c \alpha} = 5 \cdot 10^{-11} \text{ m} = \frac{1}{2} \text{ \AA}.$$

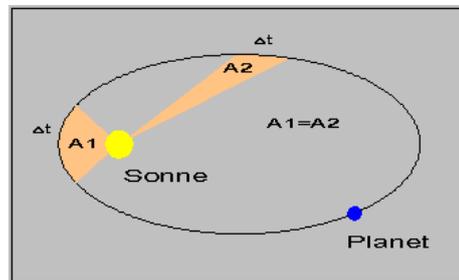
Die zur Charakterisierung atomarer Größen üblicherweise verwendeten Einheiten sind das Nanometer bzw. das Ångström:

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m},$$
$$1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}.$$

Sichtbares Licht beispielsweise hat Wellenlängen im Bereich von 380 nm—750 nm.

Nichtrelativistisch bedeutet, dass die typischen Geschwindigkeiten deutlich kleiner sind als die Lichtgeschwindigkeit: $v \ll c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 300\,000 \text{ km/s}$. Die hier besprochene Mechanik ist der Grenzfall der relativistischen Mechanik, die wir am Ende der Vorlesung in Teil III behandeln werden. Die Physik bei kleinen Abständen wird im nächsten Semester in der Quantenmechanikvorlesung besprochen.

Was bedeutet nun *theoretische Mechanik*? Ganz allgemein gesagt versucht man in der theoretischen Physik ausgehend von wenigen fundamentalen Annahmen Phänomene zu erklären bzw. Vorhersagen über den Ausgang von Experimenten zu machen. Man spricht in diesem Zusammenhang von *deduktivem*

Abbildung 1.1: Das zweite Keplersche Gesetz.¹

Vorgehen. (Eine Diskussion, wann ein Gesetz fundamental ist und weitere wissenschaftstheoretische Überlegungen finden sich beispielsweise in [7].)

Ein Standardbeispiel in der Mechanik, das verdeutlicht, was gemeint ist, ist die Planetenbewegung. Johannes Kepler (1571–1630) hatte aufgrund der Messungen von Tycho Brahe (1546–1601) die *Keplerschen Gesetze* aufgestellt, die die Bewegung der Planeten im Sonnensystem beschreiben:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.
2. Der Strahl von der Sonne zu einem Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Konstanz der Flächengeschwindigkeit).
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten verhalten sich wie die Kuben der großen Halbachsen:

$T_1, T_2 \dots$ Umlaufzeiten

$a_1, a_2 \dots$ große Halbachsen

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}.$$

Da die Keplerschen Gesetze aber aus dem 2. Newtonschen Gesetz $\vec{F} = \dot{\vec{p}}$ und dem Gravitationsgesetz hergeleitet werden können, sagt man, dass die Newtonschen Gesetze fundamentaler als die Keplerschen Gesetze sind, zumal es die Newtonschen Gesetze erlauben, die Bewegung von beliebigen Körpern in der Mechanik zu berechnen.

1.2 Die Newtonschen Axiome

Die Grundlage der klassischen Mechanik sind die Axiome von Isaac Newton (1643–1727). Die Newtonschen Axiome erlauben es die Bewegungen von Körpern in der Mechanik zu berechnen.

¹Bildquelle: <http://www.einstein-website.de/images/Kepler-2G.gif>

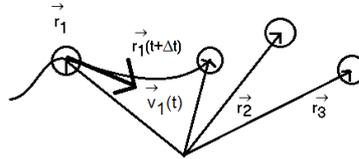


Abbildung 1.2: N Körper mit Ortsvektoren

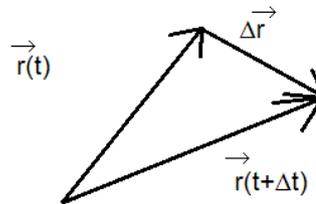


Abbildung 1.3: Zur Definition der Geschwindigkeit

Um die Newtonschen Axiome zu formulieren, betrachten wir N Körper (vgl. Abb. 1.2), deren Lage im Raum durch die zeitabhängigen Ortsvektoren

$$\vec{r}_i(t) = \begin{pmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ z_i(t) \end{pmatrix}, i = 1 \dots N.$$

beschrieben wird. Wir gehen hier davon aus, dass wir Körper betrachten, deren Ausdehnung keine Rolle spielt. Man spricht auch von Massenpunkten. Inwieweit eine solche Näherung erlaubt ist, hängt vom Problem ab. Für die Berechnung der Planetenbahnen ist es beispielsweise ausreichend die Sonne und die Planeten als Massenpunkte zu betrachten, für eine Beschreibung der Phänomene auf der Erdoberfläche, wie Ebbe und Flut ist dies natürlich nicht der Fall.

Die Geschwindigkeit $\vec{v}_i(t)$ des i -ten Körpers ist dann definiert als die Ableitung der Ortsvektoren $\vec{r}_i(t)$ nach der Zeit

$$\vec{v}_i(t) = \frac{d\vec{r}_i(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}_i(t).$$

Der Geschwindigkeitsvektor ist stets tangential zur Bahn des Teilchens (Abb. 1.2). Man sieht dies leicht ein, wenn man die Geschwindigkeit als Differenzenquotient schreibt und dann den Limes $\Delta t \rightarrow 0$ bildet:

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} + \vec{r}(t) &= \vec{r}(t + \Delta t) \\ \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} &= \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{d\vec{r}}{dt}.\end{aligned}$$

Die Beschleunigung $\vec{a}_i(t)$ eines Körpers ist definiert als

$$\vec{a}_i(t) = \dot{\vec{v}}_i(t) = \ddot{\vec{r}}_i(t).$$

Jedes Teilchen (jeder Körper) ist außerdem charakterisiert durch eine skalare Konstante, seine träge Masse $m_i, i = 1 \dots N$. Wir wollen hier zuerst den intuitiven Begriff der Masse verwenden, und später auf eine Bestimmung der Massen eingehen. D.h. wir gehen von dem naiven Begriff der trägen Masse aus, die ein Maß für den Widerstand ist, den ein Körper einer Bewegung entgegensetzt.

Der Impuls $\vec{p}_i(t)$ des i -ten Teilchens wird definiert als

$$\vec{p}_i(t) := m_i \vec{v}_i(t).$$

Der zentrale Punkt dieses Abschnitts ist die Bewegungsgleichung, die angibt, wie sich der Körper mit der Zeit bewegt, das **2. Newtonsche Axiom**

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i,$$

wobei \vec{F}_i die gesamte Kraft ist, die auf den Körper wirkt. Bei konstanter Masse ist dies äquivalent zu

$$m \ddot{\vec{r}}_i(t) = \vec{F}_i.$$

Die Newtonschen Gleichungen sind Differentialgleichungen 2. Ordnung. Das Ziel ist, diese Differentialgleichungen zu lösen, d.h. $\vec{r}_i(t)$ zu bestimmen. Gelingt dies, so haben wir die Koordinaten des Teilchens als Funktion der Zeit bestimmt.

Welche Kräfte treten nun in der Mechanik auf? Ein wichtiges Beispiel, mit dem wir es immer zu tun haben werden, ist die Gravitationskraft. Weitere Beispiele sind Federkräfte und Reibungskräfte.

Wenn man ganz allgemein davon ausgeht, dass N Massenpunkte über Kräfte, deren Natur wir nicht spezifizieren, miteinander in Wechselwirkung stehen, dann ist die Gesamtkraft auf das i -te Teilchen die Summe der Kräfte, die von allen anderen Teilchen auf dieses i -te Teilchen einwirken

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= \vec{F}_{i1} + \dots + \vec{F}_{iN} \\ &= \sum_{j, i \neq j} \vec{F}_{ji}\end{aligned}$$

Für die Gravitationskraft gilt beispielsweise, dass sich zwei Massen m_i und m_j aufgrund der Gravitation anziehen. Die Kraft auf die i -te Masse ist

$$\vec{F}_{ij} = -G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

wobei $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$ die Gravitationskonstante ist.

Das **3. Newtonsche Axiom** lautet

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

D.h. die Kraft, die der i -te Körper auf den j -ten ausübt ist betragsmässig gleich der Kraft welche der j -te Körper auf den i -ten ausübt, zeigt aber in die entgegengesetzte Richtung. Das 3. Newtonsche Axiom ist auch unter dem Schlagwort „*actio = reactio*“ bekannt. Das 3. Newtonsche Axiom gilt nicht für alle Kräfte, Ein Beispiel für eine Kraft, für welche es **nicht** gilt, ist die Kraft zwischen zwei bewegten Ladungen in der Elektrodynamik.

In der Mechanik untersuchen wir aber nur Systeme, für die das 3. Newtonsche Axiom gilt. Wir betrachten als Beispiel die Gravitationskraft:

$$\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{i \leftarrow j} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

\vec{F}_{ij} ist die Kraft, die das j -te Teilchen auf das i -te Teilchen ausübt. Betrachten wir umgekehrt die Kraft \vec{F}_{ji} , die das j -te Teilchen auf das i -te Teilchen ausübt, so finden wir

$$\vec{F}_{ji} = \vec{F}_{j \leftarrow i} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) = -\vec{F}_{ij}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass für die Gravitationskraft das 3. Newtonsche Axiom gilt..

Das **1. Newtonsche Axiom** lautet: Wenn die Gesamtkraft auf das i -te Teilchen Null ist ($\vec{F}_i = 0$), dann bleibt der Impuls erhalten.

$$\vec{F}_i = \dot{\vec{p}}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_i \text{ hängt nicht von der Zeit ab.}$$

Dies ist das erste Beispiel eines Erhaltungssatzes, der Impulserhaltung. Bereits vor Newton wurde dieses sog. „Trägheitsprinzip“ von Galilei formuliert:

Ein bewegtes Objekt, auf das keine äußeren Kräfte wirken, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geraden Linie. Ein ruhendes Objekt bleibt ruhend.

Bemerkungen und Beispiele

1. Das freie Teilchen. Das einfachste Beispiel für die Anwendung des 2. Newtonschen Gesetzes ist das freie Teilchen. Frei heißt, dass keine Kraft wirkt, also den Fall des 1. Newtonschen Axioms; außerdem betrachten wir nur ein Teilchen und lassen den Index an der Kraft weg, also

$$\vec{F} = 0$$

Aus

$$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}$$

folgt

$$0 = m \begin{pmatrix} \dot{v}_x(t) \\ \dot{v}_y(t) \\ \dot{v}_z(t) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}$$

Dies sind drei Differentialgleichungen 2. Ordnung für $\vec{r}(t)$. Für die erste Komponente ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ \dot{x}(t) &= v_x^0 \quad \text{Konstante} \\ x(t) &= v_x^0 t + x^0, \end{aligned}$$

für die anderen Komponenten analog, also zusammengefasst

$$\vec{r}(t) = \vec{v}^0 t + \vec{r}^0.$$

Wir erhalten also wieder das Galileische Trägheitsprinzip.

2. Schwere Masse versus träge Masse – Bemerkung zum Gravitationsgesetz Für ein Teilchen der Masse m in einem System gravitativ wechselwirkender Teilchen m_i lautet das 2. Newtonsche Axiom

$$m\ddot{\vec{r}}(t) = G \sum_{j \neq i} \frac{mm_j(\vec{r}_j(t) - \vec{r}(t))}{|\vec{r}_j(t) - \vec{r}(t)|^3}.$$

Dieser Satz von Gleichungen ist für die Wechselwirkung von mehr als zwei Massen im Allgemeinen nicht geschlossen analytisch lösbar. (Für zwei Massen, werden wir die Lösung im Detail im nächsten Kapitel diskutieren.)

Wir wollen hier auf einen anderen subtilen Punkt hinweisen: Schreibt man die Bewegungsgleichungen in dieser Form auf, muss man sich bewusst machen, dass die Masse die auf der einen Seite steht, die sogenannte träge Masse m_I ist, die ein Maß für den Widerstand darstellt, den der Körper einer Kraft entgegensetzt. Im Gravitationsgesetz hingegen steht die sogenannte schwere Masse m_G . Newton war sich wohl bewusst, dass die Äquivalenz von schwerer und träger Masse nicht genau gelten muss.

Eine Möglichkeit die Gleichheit von träger und schwerer Masse zu zeigen sind Fallexperimente, wie sie schon Galilei durchgeführt hat.

Sehen wir uns also ein solches Fallexperiment an. Wenn wir die Kraft auf ein Teilchen an der Erdoberfläche betrachten, erhalten wir

$$\vec{F}_G = -G \frac{mm_E \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Wir setzen Zahlenwerte ein:

$$\begin{aligned} G &= 6,6732 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \\ m_E &= 5,977 \cdot 10^{24} \text{ kg} \\ r_E &= 6,37817 \cdot 10^3 \text{ km} \\ \Rightarrow g &= \frac{Gm_E}{r_E^2} = 9,809 \text{ m/s}^2, \end{aligned}$$

und finden das bekannte Ergebnis, dass die Erdbeschleunigung auf der Erdoberfläche konstant ist.

Die Bewegungsgleichungen sind dann:

$$\begin{aligned} m_I \ddot{\vec{r}} &= m_G \vec{g} \\ \ddot{\vec{r}} &= \frac{m_G}{m_I} \vec{g} \\ \ddot{x} &= 0 \\ \ddot{y} &= 0 \\ \ddot{z} &= \frac{m_G}{m_I} g \\ v_z = \dot{z} &= \frac{m_G}{m_I} g t + v^0 \\ z &= \frac{m_G}{m_I} g \frac{t^2}{2} + v^0 t + z^0 \end{aligned}$$

D. h., wenn m_G/m_I für verschiedene Stoffe verschieden ist, können die Fallzeiten für verschiedene Stoffe verschieden sein. Die Fallexperimente von Galilei wie auch spätere Experimente von Huygens und Eötvös zeigten aber, dass $m_I = m_G$, also eine Gleichheit von träger und schwerer Masse. Wir können damit in den obigen Ausdrücken m_I gegen m_G kürzen und finden das bekannte Ergebnis für den freien Fall im Erdfeld.

1.3 Der Begriff der Arbeit

Eine zentrale Größe in der Mechanik ist die Arbeit bzw. die Energie. Aufgrund der Energieerhaltung vereinfachen sich viele Probleme. Um die Arbeit zu definieren stellen wir zunächst eine Vorüberlegung in einer Dimension an: Wir gehen vom 2. Newtonschen Axiom

$$m\ddot{x} = F(x)$$

aus und bilden das Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} m\ddot{x} dx = \int_{t_1}^{t_2} m\ddot{x}\dot{x} dt = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx,$$

wobei wir das Integral mit Hilfe von

$$dx = \frac{dx}{dt} dt$$

umgeschrieben haben.

Da außerdem $\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = 2\dot{x}\ddot{x}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \int \frac{d}{dt}(\dot{x}^2) dt &= \underbrace{\int F(x) dx}_{\rightarrow \text{Arbeit}} \\ \frac{m}{2} \dot{x}^2 \Big|_{t_1}^{t_2} &= \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(x) dx \end{aligned}$$

Definieren wir die potentielle Energie über

$$\int_{x_0}^x F(x') dx' =: -V(x) + V(x_0)$$

so folgt der Energiesatz

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} v^2(t_1) - \frac{m}{2} v^2(t_2) &= -V(x_1) + V(x_2) \\ \Rightarrow \frac{m}{2} v^2(t_1) + V(x_1) &= \frac{m}{2} v^2(t_2) + V(x_2) = E \end{aligned}$$

Dabei ist

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2$$

die kinetische Energie und V die potentielle Energie. Den Energiesatz können wir also schreiben als

$$E = T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Die Gesamtenergie E ist zeitlich konstant, sie bleibt erhalten. $F(x)$ heißt eine konservative Kraft, d. h. sie hat keine Zeit- oder Geschwindigkeitsabhängigkeit. Die kinetische Energie ist positiv definit, $T \geq 0$. Da E konstant bleibt, folgt für die potentielle Energie $V \leq E$. Dadurch kann man Aussagen über die Bewegung eines Teilchens mit Energie E machen. In einer Potentialmulde, die einer anziehenden Kraft entspricht, kann sich ein Teilchen überall bewegen, wo die potentielle Energie kleiner als die Gesamtenergie des Teilchens ist. Anschaulich kann man dies an einer reibungslosen Achterbahn erklären: wenn man am höchsten Punkt startet, kann man die gesamte Achterbahn durchfahren; startet man dagegen auf halber Höhe, wird man zurückrollen, bevor der höchste Punkt erreicht ist, weil die kinetische Energie nicht ausreicht, um eine Steigung – also eine Potentialbarriere, die einer abstoßenden Kraft entspricht – zu überwinden, da sie schon vor dem Gipfel vollständig in potentielle Energie umgewandelt wurde. Besondere Bedeutung haben die Stellen des Potentials mit $\frac{dV}{dx} = 0$. An diesen Stellen verschwindet die Kraft und wir haben eine Gleichgewichtslage.

In Abb. 1.8 ist der linke Punkt mit $dV/dx = 0$ ein stabiles Gleichgewicht, der rechte ein labiles. Eine Taylorentwicklung des Potentials um die Gleichgewichtslage (die hier ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf $x = 0$ gesetzt sei)

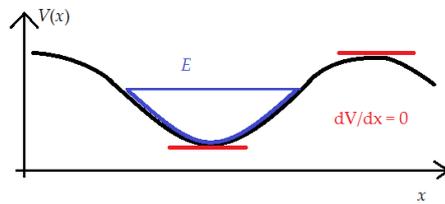


Abbildung 1.4: Potentiallandschaft

ergibt

$$V(x) = V(0) + \underbrace{\frac{dV}{dx}\bigg|_{x=0}}_{=0} x + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dx^2}\bigg|_{x=0} x^2 + \text{höhere Terme}$$

Suchen wir ein Extremum, so verschwindet die erste Ableitung. In der Umgebung des Gleichgewichts, wo wir die höheren Terme vernachlässigen können, erhalten wir einen harmonischen Oszillator mit dem Potential

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2,$$

$$k = \frac{d^2V}{dx^2}\bigg|_{x=0} = V''(0)$$

Die zugehörige Kraft ist

$$F(x) = -\frac{dV}{dx} = -kx$$

also ist die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = -kx.$$

Dies bezeichnet man als **harmonische Näherung**. Wir lösen nun diese Differentialgleichung.

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Für $k < 0$, also an einem Maximum des Potentials, erhalten wir

$$p := \sqrt{\frac{-k}{m}}, \quad p^2 = -\frac{k}{m}$$

Wir machen einen Ansatz mit Exponentialfunktion

$$x(t) = Ae^{pt} + Be^{-pt} \Rightarrow \ddot{x} = p^2x,$$

was die Differentialgleichung $\ddot{x} - p^2x = 0$ offensichtlich erfüllt. Die Konstanten A und B bestimmt man anhand der Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}x(t=0) &= 0 = A + B \Leftrightarrow B = -A \\ \dot{x}(t=0) &= V_0 \\ \dot{x}(t) &= Ape^{pt} - Bpe^{-pt} = Ape^{pt} + Ape^{-pt} \\ \dot{x}(t) &= V_0 = 2Ap\end{aligned}$$

Die Auslenkung um die Gleichgewichtslage nimmt also für $k < 0$ exponentiell zu, es handelt sich um ein **labiles Gleichgewicht**.

Für $k > 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ x(t) &= A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ \ddot{x}(t) &= -\omega^2 x(t).\end{aligned}$$

Die Parameter A, B werden wieder aus den Anfangsbedingungen bestimmt. In diesem Fall bleiben die Auslenkungen um das Gleichgewicht beschränkt, es handelt sich um ein **stabiles Gleichgewicht**. Äquivalent kann man auch den Ansatz $x(t) = C \sin(\omega t + \theta)$ machen: wenn wir

$$\begin{aligned}A &= C \cos \theta \\ B &= C \sin \theta\end{aligned}$$

setzen, erhalten wir aus dem ersten Ansatz

$$\begin{aligned}x(t) &= C \cos \theta \sin \omega t + C \sin \theta \cos \omega t \\ &= C \sin(\omega t + \theta)\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir das Additionstheorem $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$ benutzt.

Gehen wir nun zum dreidimensionalen Fall über. Wir betrachten also Kraftfelder

$$\vec{F}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} F_x(\vec{r}) \\ F_y(\vec{r}) \\ F_z(\vec{z}) \end{pmatrix}$$

d. h. ein Kraftvektor, der an jedem Punkt im Raum einen anderen Wert haben kann. (Graphisch stellt man ein Vektorfeld oft durch an Raumpunkte angeheftete Pfeile dar [vgl. Abb. 1.5]. Da ein Vektorfeld allerdings eine Abbildung $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist, kann eine solche graphische Darstellung irreführend sein.)

Um die Arbeit im dreidimensionalen Fall zu berechnen, zerlegen wir den Weg in Wegelemente $\Delta\vec{r}$, auf denen die Änderung der Kraft unwesentlich ist.

$$\begin{aligned}\Delta W &= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}, \\ W &= \sum \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}.\end{aligned}$$

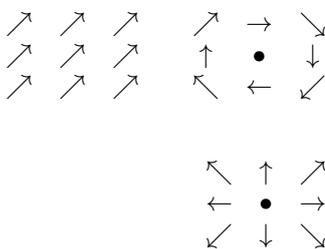


Abbildung 1.5: Kraftfelder

Im Limes infinitesimaler Unterteilung erhalten wir

$$W = \int \vec{F} \, d\vec{r}$$

bzw. zwischen zwei Punkten

$$W_{12} = \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r}.$$

Wir gehen nun analog wie im eindimensionalen Fall vor und formen das Integral $\int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r}$ um:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} \\ &= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \, d\vec{r} \\ &= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \frac{d\vec{r}}{dt} \, dt \\ &= \int_1^2 m \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{v} \, dt \\ &= \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt} (\vec{v}^2) \, dt \\ &= \frac{m}{2} (\vec{v}_2^2 - \vec{v}_1^2). \end{aligned}$$

Man überzeugt sich durch eine Nebenrechnung dass

$$\frac{d}{dt} (\vec{v}^2) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

gilt:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) &= 2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \\ &= 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}.\end{aligned}$$

Den Ausdruck

$$T = \frac{m}{2} \vec{v}^2$$

bezeichnen wir als kinetische Energie des Teilchen mit der Masse m und der Geschwindigkeit \vec{v} .

Die gesamte Arbeit, die man aufbringen muss, oder die man gewinnt, um ein Teilchen von Punkt 1 zu Punkt 2 zu bewegen, ist

$$\begin{aligned}W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2) \\ &= T_2 - T_1\end{aligned}$$

Wir betrachten im Folgenden Kraftfelder, die nicht explizit von der Zeit abhängen, also keine Felder vom Typ $\vec{F}(t)$, und keine geschwindigkeitsabhängigen Kräfte, schließen also ebenfalls Felder vom Typ $\vec{F}(\dot{\vec{r}})$ aus und stellen die Frage, ob bei gegebenem Anfangs- und Endpunkt und gegebenem Kraftfeld die Arbeit vom Weg abhängt.

Offensichtlich wird das Integral vom Weg abhängen, wenn Reibung vorhanden ist: je länger man geht, desto mehr Arbeit muss man aufwenden; man muss also mehr Arbeit aufwenden, wenn man vom Physikgebäude zur Mensa geht und dabei am Delta vorbeigeht als man auf dem direkten Weg aufbringen muss. Wir überlegen uns anschaulich, dass wir den Energiesatz analog zu der Form in einer Dimension nur aufschreiben, wenn das Integral $\int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r}$ nicht vom Weg abhängt, denn nur dann können wir eine Potentialfunktion angeben, die nur vom Ort (und nicht vom Weg) abhängt, so dass gilt

$$\begin{aligned}T_2 - T_1 &= \frac{1}{2}m\vec{v}_2^2 - \frac{1}{2}m\vec{v}_1^2 = \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} \\ &= -V(\vec{r}_2) + V(\vec{r}_1)\end{aligned}$$

. Wir sehen diesen Zusammenhang im nächsten Unterkapitel auch formal, dazu definieren wir zuerst konservative Kräfte.

1.4 Potentiale und konservative Kräfte

Man nennt eine Kraft \vec{F} konservativ, wenn das Wegintegral $\int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r}$ zwischen zwei beliebigen Punkten nicht vom Weg abhängt.

Im Besonderen bedeutet dies, dass das Integral über geschlossene Wege C verschwindet

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = 0,$$

denn man kann zwei Punkte 1, 2 auf dem Weg definieren und das Integral über den geschlossenen Weg schreiben als

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \, d\vec{r} &= \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} + \int_2^1 \vec{F} \, d\vec{r} \\ &= \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} - \int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Wir wenden nun auf das Wegintegral über den geschlossenen Weg den Stokes'schen Satz an:

$$\oint_C \vec{F} \, d\vec{r} = \int_{\mathcal{O}} (\nabla \times \vec{F}) \, d\vec{\mathcal{O}} = 0$$

dabei ist \mathcal{O} die durch C berandete Oberfläche und $d\vec{\mathcal{O}}$ ein Flächenelement auf dieser Fläche, das zur Fläche senkrecht steht ($d\vec{\mathcal{O}} \perp \mathcal{O}$).

Da das Integral für alle Kurven C und alle zu dieser Kurve gehörigen Oberflächen \mathcal{O} verschwindet, muss der Integrand verschwinden. So haben wir gefunden, dass ein Kraftfeld konservativ ist, wenn seine Rotation verschwindet.

Verwenden wir weiter, dass die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet, $\nabla \times (\nabla V(\vec{r})) = \vec{0}$, so muss sich die Kraft eines konservativen Kraftfeldes als Gradient eines Potentials schreiben lassen. Den letzten Punkt hatten wir ja auch schon aus der Anschauung gefunden.

Zusammenfassend sind folgende Aussagen äquivalent sind:

- \vec{F} ist ein konservatives Kraftfeld.
- $\oint \vec{F} \, d\vec{r} = 0$ für alle geschlossenen Wege.
- $\int_1^2 \vec{F} \, d\vec{r}$ hängt nicht vom Weg ab.
- $\nabla \times \vec{F} = 0$.
- Man kann das Kraftfeld als Gradienten eines Skalarfeldes schreiben, $\vec{F} = -\nabla V$, d. h. es existiert ein Potential V .

Für solche konservativen Kräfte gilt also der Erhaltungssatz der Energie

$$T + V = E.$$

Wenn die Kräfte nichtkonservativ sind, gilt in der Mechanik die Energieerhaltung nicht mehr in dem Sinne, dass die Energie durch die kinetische und potentielle Energie vollständig beschrieben wäre. Die Energieerhaltung gilt in der Physik immer, aber wenn nichtkonservative Kräfte auftreten, muss man weitere

Energieformen mit in Betracht ziehen, z. B. die Wärmeenergie in der Thermodynamik, wenn Reibung auftritt.

Wir schreiben die Bedingung des wegunabhängigen Linienintegrals

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') d\vec{r}' = -V(\vec{r})$$

nun infinitesimal

$$\vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} = -dV.$$

Das totale Differential dV des Potentials ist

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \\ &= \nabla V d\vec{r}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich mit der anderen Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} dV &= -\vec{F} d\vec{r} \\ &= -(F_x dx + F_y dy + F_z dz) \end{aligned}$$

liefert dann $F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$, $F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$

Das Zentralpotential $V(r)$ Wir betrachten als Beispiel ein Zentralpotential der Form $V(r) = 1/r^n$ wobei $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \nabla \frac{1}{r^n} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} (x^2 + y^2 + z^2)^{-n/2} \\ &= -\frac{n}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-n/2-1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \\ &= -n \frac{\vec{r}}{r^{n+2}} \end{aligned}$$

Beim Gravitationspotential handelt es sich um ein Zentralpotential mit $n = 1$. Die allgemeine Form

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

reduziert sich für zwei Massen M, m im Ruhesystem einer Masse zu

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^3} \vec{r}.$$

Das zugehörige Potential ist

$$V_G = -\frac{GmM}{r}.$$

Wir zeigen dies durch Bilden des Gradienten:

$$\begin{aligned} -\nabla \left(-\frac{GmM}{r} \right) &= GMm \nabla \frac{1}{r} \\ &= -\frac{GMm}{r^3} \vec{r} \\ &= \vec{F}_G. \end{aligned}$$

Wenn hingegen das Potential unbekannt ist, aber die Kraft gegeben ist, so kann man durch Berechnen des Linienintegral das Potential berechnen. Der Anfangspunkt \vec{r}_0 ist dabei unwichtig, da er im Potential eine additive Konstante ist, die beim Ableiten zur Bildung der beobachtbaren Kraft entfällt.

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}') \, d\vec{r}' \\ &= GmM \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{1}{r'^3} \vec{r}' \, d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Da bereits (aus dem Verschwinden der Rotation) bekannt ist, dass die Kraft konservativ ist, kann man den Weg möglichst einfach wählen. Die Gravitationskraft zeigt in radialer Richtung, also liefert eine Verschiebung $d\vec{r}'$ auf konzentrischen Kugelschalen keinen Beitrag, da das Skalarprodukt zwischen senkrechten Vektoren verschwindet. Damit können wir den Weg aufteilen in eine Verschiebung in radialer Richtung und einen verschwindenden Beitrag:

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= GmM \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^3} r' \, dr' + 0 \\ &= GmM \int_{r_0}^r \frac{1}{r'^2} \, dr' \\ &= -GmM \left. \frac{1}{r'} \right|_{r_0}^r \\ &= -GmM \frac{1}{r} + V_0 \\ V_G(r) &= -\frac{GmM}{r} + V_0. \end{aligned}$$

Ein weiteres wichtiges Beispiel für ein Zentralpotential ist der harmonische Oszillator, bei dem $n = -2$ ist.

$$\begin{aligned} V_H &= \frac{D}{2} r^2 \\ \nabla r^2 &= 2\vec{r} \\ \vec{F}_H &= -\nabla V_H = -D\vec{r}. \end{aligned}$$

Anwendung des 2. Newtonschen Axioms liefert

$$m\ddot{\vec{r}} = -D\vec{r}$$

oder in Komponenten

$$m\ddot{x} = -Dx$$

$$m\ddot{y} = -Dy$$

$$m\ddot{z} = -Dz$$

1.5 Der Drehimpuls

Für einen Massepunkt m mit Ortsvektor \vec{r} und Impuls \vec{p} ist der Drehimpuls definiert als

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Wir bilden die Zeitableitung des Drehimpulses:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{L} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) \\ &= \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} \\ &= m \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= \vec{N} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Definition des Impulses und das 2. Newtonsche Axiom benutzt und das aus der Experimentalphysik bekannte Drehmoment $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ identifiziert. Für die Zeitabhängigkeit von Drehimpuls und Impuls gilt also

$$\begin{array}{llll} \dot{\vec{L}} = \vec{N} & \vec{N} = 0 & \Rightarrow \dot{\vec{L}} = 0 & \vec{L} \text{ konstanter Vektor} \\ \dot{\vec{p}} = \vec{F} & \vec{F} = 0 & \Rightarrow \dot{\vec{p}} = 0 & \vec{p} \text{ konstanter Vektor} \end{array}$$

Drehimpulserhaltung. Wenn das gesamte Drehmoment, das auf einen Körper einwirkt, verschwindet, so ist der Drehimpuls erhalten.

Als Beispiel betrachten wir den Drehimpuls im Gravitationspotential:

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} &= \vec{r} \times \vec{F}_G \\ &= \vec{r} \times \left(-k \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \\ &= 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ konstant.} \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis gilt für alle Zentralpotentiale, da die Kraft in einem Zentralpotential stets in dieselbe Richtung wie \vec{r} zeigt.

1.6 Mechanik eines Systems von Teilchen

Wir betrachten ein System von N Massepunkten mit den Massen m_i an den Orten \vec{r}_i . Als Abkürzungen führen wir die Gesamtmasse

$$M := \sum_{i=1}^N m_i$$

und den Schwerpunkt

$$\vec{R} := \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M}$$

ein.

Die Bewegungsgleichung des i -ten Teilchens ist

$$\dot{\vec{p}}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i^e,$$

wobei wir mit \vec{F}_i^e noch eine externe Kraft auf das i -te Teilchen zugelassen haben. Ausserdem setzen wir das Gesetz von *actio = reactio* voraus, also:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$

Wenn wir nun über alle Teilchen summieren und das Gesetz von *actio = reactio* ausnützen so erhalten wir

$$\sum_i \dot{\vec{p}}_i = \underbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}_{ij}}_{=0} + \sum_i \vec{F}_i^e = \sum_i \vec{F}_i^e.$$

Damit ergibt sich als Bewegungsgleichung für den Schwerpunkt

$$M \ddot{\vec{R}} = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i^e = \vec{F}_{\text{ges}}^e.$$

Das Massenzentrum bewegt sich so, als ob die gesamte äußere Kraft auf die Gesamtmasse des Systems wirkt, die im Massenzentrum konzentriert ist. Ist die gesamte äußere Kraft Null, so bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

$$M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} = \dot{\vec{p}}_{\text{ges}} = 0$$

\vec{p}_{ges} erhalten

Der Drehimpuls des i -ten Teilchens ist gegeben durch

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i.$$

Für den Gesamtdrehimpuls ergibt sich damit

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$

Mit dem 2. Newtonschen Axiom $\dot{\vec{p}}_i = \vec{F}_i^e + \sum_j \vec{F}_{ij}$ ergibt sich

$$\vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e + \vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij}.$$

Da in der Zeitableitung des Drehimpulses $\dot{\vec{L}}_i = \dot{\vec{r}}_i \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \dot{\vec{p}}_i$ der erste Term verschwindet, ergibt sich

$$\dot{\vec{L}}_i = \vec{N}_i^e + \underbrace{\vec{r}_i \times \sum_j \vec{F}_{ij}}_{\text{i. Allg. } \neq 0}$$

Der zweite Term in diesem Ausdruck verschwindet im Allgemeinen nicht. Für die Ableitung des Gesamtdrehimpulses ergibt sich damit

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^e + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}.$$

Wir führen eine Nebenrechnung für den wichtigen Spezialfall einer Zentralkraft durch:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji} &= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} \\ &= 0 \text{ für Zentralkräfte,} \end{aligned}$$

da bei Zentralkräften immer die Kraft \vec{F}_{ij} parallel zum Verbindungsvektor $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ ist. Bei Zentralkräften gilt also

$$\dot{\vec{L}} = \vec{N}^e$$

Damit ergibt sich der Erhaltungssatz für den Gesamtdrehimpuls \vec{L} : \vec{L} ist zeitlich konstant, wenn das angewandte äußere Drehmoment verschwindet.

Wir gehen jetzt über zu Schwerpunktskoordinaten \vec{r}'_i (vgl. Abb. 1.6), die definiert sind als

$$\begin{aligned} \vec{r}'_i &= \vec{r}_i - \vec{R} \\ \Leftrightarrow \vec{r}_i &= \vec{R} + \vec{r}'_i. \end{aligned}$$

Als Hilfsformel berechnen wir den Schwerpunkt in Schwerpunktskoordinaten, der offensichtlich verschwinden muss

$$\begin{aligned} \sum_i m_i \vec{r}'_i &= \sum_i m_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \\ &= \sum_i m_i \vec{r}_i - M \vec{R} \\ &= M \vec{R} - M \vec{R} = 0. \end{aligned}$$

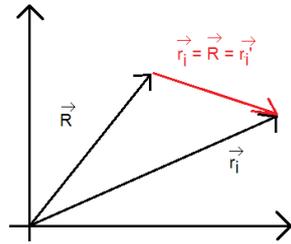


Abbildung 1.6: Schwerpunktskoordinaten

Durch Ableitung nach der Zeit ergibt sich auch, dass der Gesamtimpuls in Schwerpunktskoordinaten verschwindet

$$\sum m_i \dot{r}_i^* = 0.$$

Mit diesen Hilfsformeln schreiben wir nun den Gesamtdrehimpuls im ursprünglichen Koordinatensystem auf

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i \\ &= \sum_i m_i (\vec{R} + \vec{r}_i^*) \times (\dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_i^*) \\ &= \sum_i m_i \vec{R} \times \dot{\vec{R}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{R} \times \dot{\vec{r}}_i^*}_{=0} \\ &\quad + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{R}}}_{=0} + \sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^* \\ \vec{L} &= \underbrace{M \vec{R} \times \dot{\vec{R}}}_{\text{Drehimpuls des Schwerpunkts}} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_i^* \times \dot{\vec{r}}_i^*}_{\text{Drehimpuls um das Massezentrum}} \end{aligned}$$

Ganz analog kann man für die kinetische Energie zeigen

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 \\ &= \frac{1}{2} M (\dot{\vec{R}})^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_i^*)^2. \end{aligned}$$

Sofern die Kräfte konservativ sind, kann man die potentielle Energie schreiben als

$$V = \sum_i V_i^e + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} V_{ij}$$

Für ein System von N Teilchen ist die Gesamtenergie $T + V$ erhalten, wenn die *inneren* und äußeren Kräfte konservativ sind.

Kapitel 2

Das Keplerproblem

Wir betrachten zwei Massen m_1, m_2 an den Orten \vec{r}_1, \vec{r}_2 , die gravitativ miteinander wechselwirken. Äußere Kräfte sollen keine auftreten. Die beiden Massen üben also die Kräfte

$$\vec{F}_{12} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$
$$\vec{F}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

aufeinander aus. Nach dem 2. Newtonschen Axiom erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = \frac{K}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \quad (2.1)$$

$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = \frac{K}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (2.2)$$

wobei $K := Gm_1m_2$. Die Gleichungen (2.1) und (2.2) stellen sechs Differentialgleichungen dar, die wir lösen müssen. Um das Problem zu vereinfachen, transformieren wir als erstes in das Schwerpunktsystem. Dazu addieren wir (2.1) und (2.2)

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0.$$

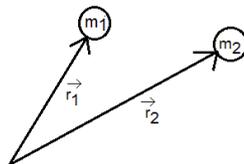


Abbildung 2.1: Keplerproblem

Verwenden wir die Definition des Schwerpunktes

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

so erhalten wir

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = 0.$$

Der Schwerpunkt verhält sich also wie ein »freies Teilchen«. Diese Bewegungsgleichung haben wir bereits gelöst, die Bahn des Schwerpunktes ist

$$\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{v}_0 t.$$

Als nächstes bilden wir die Differenz der Gleichungen (2.1)–(2.2):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 - m_2 \ddot{\vec{r}}_2 &= 2 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = \frac{2\vec{r}}{r^3} K \\ \text{mit } \vec{r} &:= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{r}_1 &= \vec{R} + \vec{r}'_1. \end{aligned}$$

Wir führen eine Nebenrechnung durch und zeigen

$$\begin{aligned} \vec{r}'_1 &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}, \\ \text{denn } \vec{r}'_1 &= \vec{r}_1 - \vec{R} = \vec{r}_1 - \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_1 - m_1 \vec{r}_1 - m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \\ &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}. \end{aligned}$$

Damit können wir die Differenz von (2.1) und (2.2) schreiben als

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -\frac{\vec{r}}{r^3} K.$$

Der Ausdruck

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

wird als reduzierte Masse bezeichnet. Wenn die Massen gleich sind $m_1 = m_2 = m$, ist die reduzierte Masse $\mu = m/2$. Wenn hingegen eine Masse wesentlich schwerer ist als die andere $m_1 \ll m_2$, erhält man

$$\mu = \frac{m_1}{\underbrace{\frac{m_2}{m_1} + 1}_{\rightarrow 0}} \approx m_1$$

Damit haben wir das Keplerproblem auf ein »äquivalentes Einkörperproblem« zurückgeführt

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -K \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (2.3)$$

Diese Gleichung beschreibt die Bewegung eines Körpers mit Masse μ in einem festen $1/r$ -Potential.

Im Folgenden schreiben wir $m \equiv \mu$. Die Gesamtenergie dieses reduzierten Einkörperproblems ist damit

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r)$$

mit $V(r) = -\frac{K}{r}$

Der Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ist zeitlich konstant, denn

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = 0$$

Somit ist \vec{L} ein konstanter Vektor. Damit ist insbesondere auch seine Richtung konstant und die gesamte Bewegung verläuft in einer Ebene senkrecht zu \vec{L} . (Für Planetenbewegungen nennt man diese Ebene die Ebene der Ekliptik.)

Wir nutzen die Konstanz von \vec{L} aus, indem wir unser Koordinatensystem so wählen, dass \vec{L} in z -Richtung zeigt. Damit spielt sich die ganze Bewegung in der xy -Ebene ab. In der xy -Ebene wählen wir als neue Koordinaten r und φ

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unser Ziel ist die Bahnkurve $r(\varphi)$ zu bestimmen.

In den neuen Koordinaten ist

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + r\dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \ell := |\vec{L}| = mr^2\dot{\varphi}.$$

ℓ ist eine Konstante der Bewegung. Wir können damit die Energie schreiben als

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 + V(r) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2} + V(r). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Damit haben wir die Energie in Abhängigkeit von nur noch einer Koordinate r ausgedrückt.

Wir können das Problem auch als die Energie eines Massenpunktes in einem eindimensionalen effektiven Potential

$$V_{\text{eff}} = \frac{\ell^2}{2mr^2} + V(r)$$

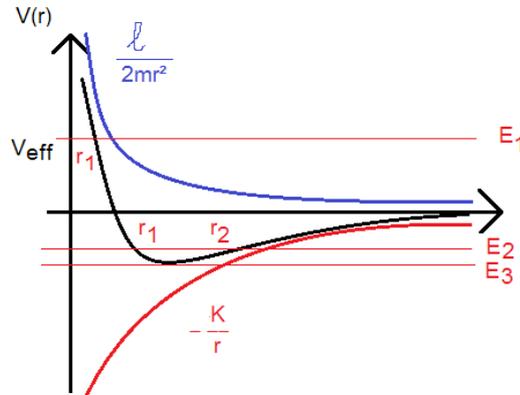


Abbildung 2.2: Das effektive Potential für das Keplerproblem

betrachten. Der Potentialterm ℓ^2/mr^2 hat deshalb auch den Namen Drehimpulsbarriere.

Bevor wir die eindimensionale Bewegungsgleichung genauer ansehen, beschäftigen wir uns noch mit dem Zusatzterm im Potential. Die aus dem Zusatzterm ℓ^2/mr^2 dieses effektiven Potentials resultierende Kraft ist

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\nabla \left(\frac{\ell^2}{mr^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\ell^2}{m} \nabla \frac{1}{r^2} \\ &= \frac{\ell^2}{m} \frac{\vec{r}}{r^4}.\end{aligned}$$

Für den einfachen Fall einer Kreisbewegung ist $\ell = mrv$ und die Kraft wird zu

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{m^2 r^2 v^2}{m} \frac{\vec{r}}{r^4} \\ &= m \frac{1}{r^2} v^2 \vec{r} \\ &= m \frac{v^2}{r} \hat{r} \text{ mit dem Einheitsvektor } \hat{r} := \frac{\vec{r}}{r}.\end{aligned}$$

Dies ist die Zentripetalkraft auf einer Kreisbahn.

Wir betrachten nun die Bewegung eines Massepunktes mit Energie $E = E_1$ in diesem Potential V_{eff} (vgl. Abb. 2.2). Der Abstand zwischen der Kurve $V_{\text{eff}}(r)$ und der waagerechten Linie, die E_1 darstellt, ist die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ des Massepunktes. Man sieht damit, dass ein Massepunkt mit Energie $E = E_1$ nie näher als r_1 an das Kraftzentrum herankommen kann. (Für $r < r_1$ wäre $V_{\text{eff}} > E_1$ und somit $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 < 0$.) Für ein Teilchen mit Energie E_1 gibt es also eine untere, aber keine obere Grenze für den Abstand. Das Teilchen kommt aus dem Unendlichen, stößt an die Potentialbarriere und wandert zurück ins Unendliche.

Anders ist die Situation für ein Teilchen mit Energie $E = E_2 < 0$. Hier gibt es einen oberen und einen unteren Grenzwert für den Abstand, d. h. das Teilchen führt eine gebundene Bewegung zwischen den Radien r_1 und r_2 aus.

Für $E = E_3$ fallen r_1 und r_2 zusammen und es gilt $\dot{r} = 0$, d. h. das Teilchen bewegt sich auf einer Kreisbahn. Nach diesen qualitativen Überlegungen wollen wir nun die Bahnkurve bestimmen. Ausgangspunkt ist die Gleichung

$$E - V(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{mr^2}.$$

Umstellen nach \dot{r} liefert den Ausdruck

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V) - \frac{\ell^2}{m^2r^2}}$$

Da wir an der Bahnkurve interessiert sind, eliminieren wir die Zeit t , indem wir die folgende Umformung vornehmen:

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} \\ &= \dot{\varphi} \frac{dr}{d\varphi} \\ &= \frac{\ell}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} \\ \dot{r} &= -\frac{\ell}{m} \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r}\end{aligned}$$

Damit können wir den obigen Ausdruck für \dot{r} umschreiben und erhalten

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{1}{r} = -\frac{m}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{K}{r} \right) - \frac{\ell^2}{m^2r^2}}$$

Wir führen die neue Variable $u := 1/r$ ein und erhalten die Differentialgleichung

$$\frac{du}{d\varphi} = -\frac{m}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m}(E + Ku) - \frac{\ell^2}{m^2}u^2}.$$

Da auf der rechten Seite die Variable φ nicht auftaucht, können wir die Variablen separieren und erhalten

$$\begin{aligned}d\varphi &= \frac{-du}{\frac{m}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m}(E + Ku) - \frac{\ell^2}{m^2}u^2}} \\ \int d\varphi &= \int \frac{-du}{\sqrt{\frac{2m}{\ell^2}(E + Ku) - u^2}}\end{aligned}$$

Der Integrand dieses Integrals hat folgende Gestalt:

$$\frac{-du}{\left(-u^2 + \underbrace{\frac{2mK}{\ell^2}}_b u + \underbrace{\frac{2mE}{\ell^2}}_a \right)^{1/2}} \text{ mit } b = \frac{2mK}{\ell^2}, a = \frac{2mE}{\ell^2}$$

Im Radikanden führen wir jetzt eine quadratische Ergänzung durch

$$\begin{aligned} -u^2 + bu + a &= -\underbrace{\left(u - \frac{b}{2}\right)^2}_{z^2} + \underbrace{\frac{b^2}{4} + a}_{\alpha^2} = -z^2 + \alpha^2 \\ &= \alpha^2 \left(-\underbrace{\frac{z^2}{\alpha^2}}_{\cos^2 y} + 1 \right) = \alpha^2 \sin^2 y. \end{aligned}$$

Bei der Ersetzung $\cos^2 y = z^2/\alpha^2$ muss man genaugenommen noch zeigen, dass $0 \leq z^2/\alpha^2 \leq 1$. Für die Integration müssen wir jetzt noch die Substitution korrekt durchführen:

$$\begin{aligned} z &= u - \frac{b}{2} \\ dz &= du \\ \cos y &= \frac{z}{\alpha} \\ dz &= -\alpha \sin y \, dy \end{aligned}$$

Damit wird unser Integrand

$$\frac{-du}{(-u^2 + bu + a)^{1/2}} = \frac{\alpha \sin y \, dy}{\alpha \sin y} = dy.$$

Die Differentialgleichung wird damit zu

$$\begin{aligned} d\varphi &= dy \\ \varphi - \varphi_0 &= y - y_0 \\ \varphi - \varphi' &= \arccos \frac{z}{\alpha} \text{ mit } \varphi' = \varphi_0 - y_0 = \text{const} \\ &= \arccos \frac{u - b/2}{\alpha} \\ &= \arccos \left(\frac{1/r - mK/\ell^2}{\sqrt{m^2 K^2/\ell^4 + 2mE\ell^2}} \right) \\ &= \arccos \left(\frac{\ell^2/mKr - 1}{\sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}}} \right) \\ \Leftrightarrow \cos(\varphi - \varphi') &= \frac{\ell^2/mKr - 1}{\sqrt{1 + 2E\ell^2/mK^2}} \\ \frac{1}{r} &= \frac{mK^2}{\ell} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}} \cos(\varphi - \varphi') \right) \end{aligned}$$

Wir führen zwei Konstanten ein, die Exzentrizität

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}}$$

und den Parameter oder Halbparameter (*semilatus rectum*)

$$p = \frac{\ell^2}{mK}$$

Damit ergibt sich für die Bahnkurve der Ausdruck

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi'))$$

Dies ist die Parameterdarstellung eines Kegelschnittes mit einem Brennpunkt im Ursprung.

Wir betrachten die Werte, die die Exzentrizität ε annehmen kann. Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{2E\ell^2}{mK^2} &= -1 \\ E &= -\frac{mK^2}{2\ell^2} \\ r &= p \end{aligned}$$

Der Radius ist also konstant, es handelt sich um somit eine Kreisbahn. Das Ergebnis für die Energie einer Masse auf einer Kreisbahn hatten wir bereits zuvor gefunden.

Für $\varepsilon \geq 1$ kann der Nenner gegen 0 gehen, so dass $r \rightarrow \infty$. Die Bahnkurve ist eine Hyperbel oder Parabel. Wenn $\varepsilon < 1$ ist, gibt es einen endlichen minimalen und maximalen Wert für r , und die Bahnkurve ist ein Kreis oder eine Ellipse. Zusammengefasst

$E > 0$	$\varepsilon > 1$	Hyperbel
$E = 0$	$\varepsilon = 1$	Parabel
$E < 0$	$\varepsilon < 1$	Ellipse
$E = -\frac{mK^2}{2\ell^2}$	$\varepsilon = 0$	Kreis

Betrachten wir die verschiedenen Kegelschnitte genauer. Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, für die die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, den sog. Brennpunkten, konstant ($= 2a$) ist. Ein alternativer Ausdruck für die Ellipse in kartesischen Koordinaten ist

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Dabei ist a die große und b die kleine Halbachse (vgl. Abb. 2.3). Zur Herleitung der kartesischen Ellipsengleichung betrachten wir die Abstände ℓ_1 und ℓ_2 , wie sie in Abb. 2.3 gezeigt sind.

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \sqrt{(x+e)^2 + y^2} \\ \ell_2 &= \sqrt{(x-e)^2 + y^2} \end{aligned}$$

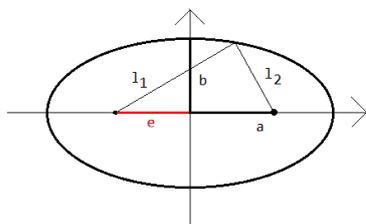


Abbildung 2.3: Konstruktion einer Ellipse

Wenn wir die Abstände $\ell_1 = \ell_2$ so wählen, dass b , e und $\ell_2 = a$ ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen, gilt

$$\begin{aligned} b^2 + e^2 &= a^2 \\ e^2 &= a^2 - b^2 \\ \varepsilon &= \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \end{aligned}$$

was wieder die Exzentrizität ist. Wir verwenden die obigen Ausdrücke für ℓ_1, ℓ_2 und benutzen, dass im betrachteten Fall $\ell_1 = \ell_2 = a$ gilt

$$\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = 2a.$$

Wenn wir diese Gleichung zweimal quadrieren und etwas umformen, erhalten wir die Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aus diesem Ausdruck erhalten wir

$$\begin{aligned} y^2 &= b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = \left(1 - \frac{e^2}{a^2}\right) b^2 \\ &= \frac{a^2 - e^2}{a^2} b^2 = \frac{b^4}{a^2} = p^2 \Rightarrow p = \frac{b^2}{a}, \end{aligned}$$

der oben eingeführte Halbparameter.

Wenn wir die Ellipse aus dem Ursprung verschieben, so dass ihr Mittelpunkt bei (x_0, y_0) liegt, wird die Ellipsengleichung zu

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Wir wollen nun zeigen, dass die oben angegebene Parameterdarstellung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon \cos \varphi)$$

äquivalent zu einer um e verschobenen Ellipse

$$\frac{(x+e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist.

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \\ r + r\varepsilon \cos \varphi &= p \\ r + \varepsilon x &= p \\ r &= p - \varepsilon x \\ r^2 &= x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2 \\ x^2 + y^2 &= p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 \\ x^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon x + y^2 &= p^2 \\ (1 - \varepsilon^2) \left(x^2 + \frac{2p\varepsilon x}{1 - \varepsilon^2} \right) + y^2 &= p^2 \\ (1 - \varepsilon^2) \left(x^2 + \frac{2p\varepsilon x}{1 - \varepsilon^2} + \frac{p^2 \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \right) + y^2 &= p^2 + \frac{p^2 \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \\ &= \frac{p^2 - p^2 \varepsilon^2 + p^2 \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} \\ &= \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}} &= 1 \\ \Rightarrow a &= \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \\ b &= \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ e &= \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \end{aligned}$$

Damit haben wir das 1. Keplersche Gesetz hergeleitet. Betrachten wir nun die Bahn eines Planeten, z. B. der Erde, näher. Den sonnennächsten Punkt der Erdbahn nennt man Perihel, den sonnenfernsten Punkt Aphel (vgl. Abb. 2.4). Der minimale und maximale Radius sind in der $r(\varphi)$ -Parametrisierung

$$\begin{array}{lll} \varphi = 0 & r_{\min} = \frac{p}{1 + \varepsilon} & \text{Perihel} \\ \varphi = \pi & r_{\max} = \frac{p}{1 - \varepsilon} & \text{Aphel} \end{array}$$

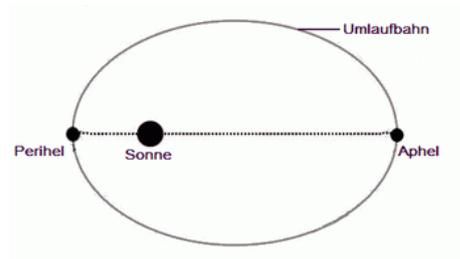
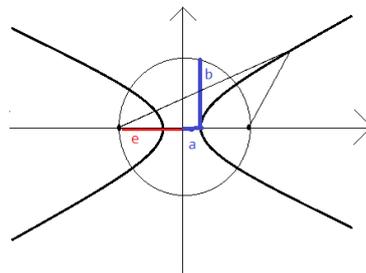
Abbildung 2.4: Perihel und Aphel einer Planetenbahn¹

Abbildung 2.5: Hyperbel

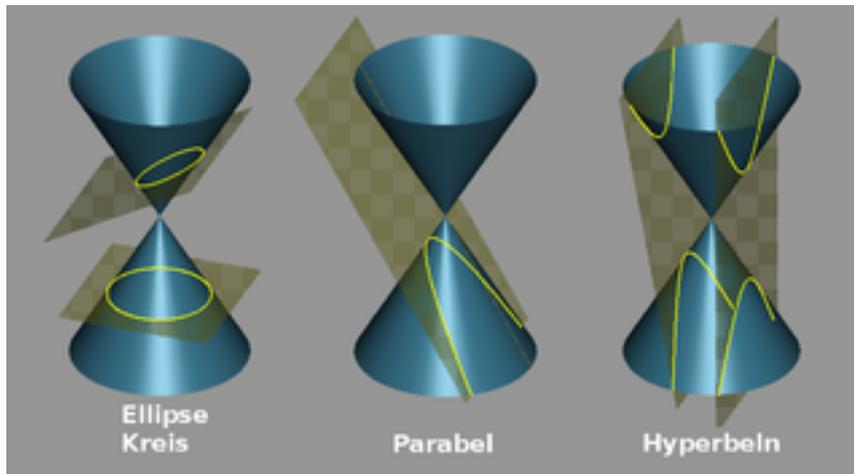
Wenn wir die im letzten Absatz gefundenen Ausdrücke für die große Halbachse a verwenden, ergeben sich

$$\begin{aligned} r_{\max} &= \frac{p}{1 + \varepsilon} &= \frac{(1 - \varepsilon^2)a}{1 + \varepsilon} &= a(1 - \varepsilon) \\ r_{\min} &= \frac{p}{1 - \varepsilon} &= \frac{(1 - \varepsilon^2)a}{1 - \varepsilon} &= a(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Bei der Hyperbel ist $a < e$. Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte, für die Differenz des Abstandes von 2 festen Punkten, den Brennpunkten, konstant ist. Die Gleichung für eine Hyperbel (vgl. Abb. 2.5) ist

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ a^2 + b^2 &= e^2 \\ p &= \frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

¹Bildquelle <http://www.ajoma.de/assets/images/Aphel.gif>

Abbildung 2.6: Kegelschnitte²

Bei der Parabel ist $\varepsilon = 1$, also

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{p}(1 + \cos \varphi) \\ r &= p \frac{1}{1 + \cos \varphi} \\ r + \underbrace{r \cos \varphi}_x &= p \\ r^2 &= (p - x)^2 = x^2 + y^2 \\ y^2 &= p^2 - 2px \\ y &= \pm \sqrt{p^2 - 2px} \end{aligned}$$

Bemerkungen

1. In den Keplerschen Gesetzen taucht die Masse des Planeten nicht auf. Die Planetenbewegung hängt also nicht von der Masse m des Planeten ab. Aus der Bewegungsgleichung erscheint das auch einsichtig

$$m \ddot{\vec{r}} = -m \frac{MG\vec{r}}{r^3}.$$

Die Parameter p und ε hängen anscheinend von m ab. Wenn man die expliziten Ausdrücke für ℓ und ε einsetzt, sieht man jedoch, dass sich die

²Bildquelle: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/thumb/b/b7/Kegelschnitt.png/320px-Kegelschnitt.png>

Masse m herauskürzt

$$\begin{aligned} \ell &= mr^2\dot{\varphi} \\ p &= \frac{m^2 r^4 \dot{\varphi}^2}{m m M G} \\ \varepsilon &= \sqrt{1 + \frac{2E\ell^2}{mK^2}}, \end{aligned}$$

so dass der scheinbare Widerspruch aufgelöst ist. Dies gilt so für das äquivalente Einkörperproblem mit

$$\begin{aligned} m &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \\ M &= m_1 + m_2, \end{aligned}$$

Für eine Masse des Planeten, die nicht wesentlich kleiner ist als die Masse der Sonne, ist die Bahnkurve nicht mehr unabhängig von der Masse des Planeten, weil die in den Parametern p und ε verbleibende Größe M als Gesamtmasse die Massen beider Körper enthält, während sich die reduzierte Masse herauskürzt.

2. **Keplersche Gesetze.** Das 1. Keplersche Gesetz (Die Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt sich die Sonne befindet.) haben wir bereits gefunden, wenn für die Exzentrizität $\varepsilon > 0, \varepsilon < 1$ gilt. Für das 2. Keplersche Gesetz benötigen wir Ausdrücke für die Halbachsen. Für die große Halbachse erhalten wir den aus dem Perihelabstand und dem Aphelabstand:

$$\begin{aligned} \varphi = 0 \quad r_{\min} &= \frac{p}{1 + \varepsilon} \\ \varphi = \pi \quad r_{\max} &= \frac{p}{1 - \varepsilon} \\ 2a &= \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} \\ &= \frac{2\ell^2}{mK} \frac{1}{\frac{2E\ell^2}{mK^2}} \\ &= \frac{K}{-E} = \frac{K}{|E|} \\ a &= \frac{K}{2|E|} \end{aligned}$$

Für die kleine Halbachse erhalten wir aus dem Halbparameter p :

$$\begin{aligned} b^2 &= pa = \frac{\ell^2}{mK} \frac{K}{2|E|} = \frac{\ell^2}{2m|E|} \\ b &= \sqrt{a} \frac{\ell}{\sqrt{mK}} \end{aligned}$$

Die Fläche der Ellipse ist

$$\begin{aligned} A &= \pi ab \\ &= \pi a^{3/2} \frac{\ell}{\sqrt{mK}} \end{aligned}$$

Die Fläche des Dreiecks, das der Fahrstrahl bei der Bewegung von \vec{r} nach $\vec{r} + d\vec{r}$ überstreicht, ist

$$dA = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}|.$$

Damit ist die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \left| \vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{\ell}{2m}.$$

Aufgrund der Drehimpulserhaltung ist dies eine Konstante. Damit ist die Konstanz der Flächengeschwindigkeit, das 2. Keplersche Gesetz, gezeigt. Sehen wir uns nun noch das 3. Keplersche Gesetz an. Es gilt ja

$$\begin{aligned} A &= \pi a^{3/2} \frac{\ell}{\sqrt{mK}} \\ A &= \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \int_0^T \frac{\ell}{2m} dt = \frac{\ell}{2m} T \\ \Rightarrow T &= \frac{\pi a^{3/2} \ell 2m}{\sqrt{mK} \ell} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}} \end{aligned}$$

Wir bilden als Beispiel das Verhältnis der Quadrate der Umlaufzeiten von Erde T_E und Jupiter T_J . Die Masse der Sonne wird dabei mit m_S bezeichnet.

$$\begin{aligned} \frac{T_E^2}{T_J^2} &= \frac{a_E^3}{a_J^3} \cdot \frac{m_E m_S}{(m_E + m_S)} \cdot \frac{m_J + m_S}{m_J m_S} \frac{G m_J m_S}{G m_E m_S} \\ \Leftrightarrow \frac{T_E^2}{T_J^2} &= \frac{a_E^3}{a_J^3} \frac{m_J + m_S}{m_E + m_S} \end{aligned}$$

Das 3. Keplersche Gesetz $T_E^2/T_J^2 = a_E^3/a_J^3$ gilt also nicht exakt, sondern nur im Limes $m_S \rightarrow \infty$ bzw. $m_{E,J}/m_S \rightarrow 0$. Anders ausgedrückt, es gibt einen kleinen Korrekturfaktor zum 3. Keplerschen Gesetz, wenn die Planeten eine Masse haben, die gegen die Sonnenmasse nicht vernachlässigt werden kann.

Kapitel 3

Das Hamiltonsche Prinzip

Bisher haben wir die Mechanik auf der Basis des 2. Newtonschen Axioms betrieben. Nun lernen wir ein anderes Prinzip, das Hamiltonsche Prinzip kennen. Diese Formulierung der Mechanik erlaubt es, Zwangsbedingungen zu berücksichtigen. Ausgehend vom Hamiltonschen Prinzip wird dann der Lagrange-Formalismus eingeführt. Besonders wichtig sind in diesem Zusammenhang die verallgemeinerten Koordinaten, die es erlauben die Bewegungsgleichung von Problemen mit Zwangsbedingungen elegant aufzuschreiben.

3.1 Generalisierte Koordinaten

Für mehrere Koordinaten lautet das zweite Newtonsche Axiom

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_j \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(e)}.$$

Wenn wir beispielsweise das Fadenpendel betrachten (vgl. Abb. 3.1), kann man das Problem im Prinzip mit kartesischen Koordinaten x, y beschreiben. x und y sind aber nicht unabhängig, sondern durch die feste Fadenlänge R verknüpft, es gilt also die Bedingung $x^2 + y^2 = R^2$. Wenn wir Polarkoordinaten r, φ einführen über

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

so sehen wir, dass $x^2 + y^2 = r^2$. Die Zwangsbedingung ist also gleichbedeutend mit $r = R = \text{const.}$ Von den zwei Koordinaten bleibt nach Berücksichtigung dieser Zwangsbedingung nur noch eine übrig, der Winkel φ . Damit haben wir das erste Beispiel einer generalisierten Koordinate kennengelernt.

Im Allgemeinen benötigen wir zur Beschreibung eines Systems von N Massen im dreidimensionalen Raum $3N$ Koordinaten $\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N$. Sind diese durch K Bedingungen der Form

$$\begin{aligned}f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= 0 \\&\vdots \\f_K(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) &= 0\end{aligned}$$

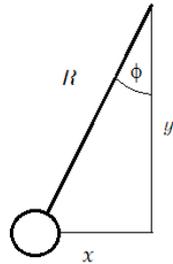


Abbildung 3.1: Das Fadenpendel als Beispiel für Zwangsbedingungen und generalisierte Koordinaten.

verknüpft, so bleiben $s = 3N - K$ Freiheitsgrade übrig, d. h. man braucht $3N - K$ unabhängige Koordinaten, um das System vollständig zu beschreiben.

Wenn die Gesamtheit unabhängiger Größen q_1, \dots, q_s die Lage eines Systems völlig charakterisiert, so nennt man diese verallgemeinerte oder generalisierte Koordinaten. Die zugehörigen Ableitungen nach der Zeit, bezeichnet als \dot{q}_i , nennt man verallgemeinerte oder generalisierte Geschwindigkeiten.

Beispiele für generalisierte Koordinaten sind die Auslenkung φ beim Pendel bzw. Breitengrad θ und Längengrad φ auf der Erdoberfläche.

Unser Ziel ist jetzt die Aufstellung der Bewegungsgleichung in den generalisierten Koordinaten.

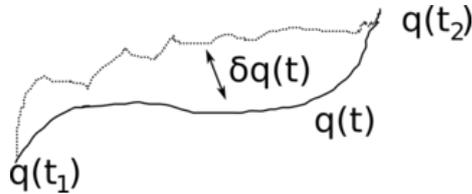
3.2 Das Hamiltonsche Prinzip

Wir betrachten ein System, das durch s generalisierte Koordinaten $q_1 \dots q_s$ und s generalisierte Geschwindigkeiten $\dot{q}_1 \dots \dot{q}_s$ beschrieben wird. Die kinetische Energie sei $T(q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s)$ und die potentielle Energie $V(q_1 \dots q_s)$. Das Hamiltonsche Prinzip besagt, dass die Bewegung des Systems zwischen zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 so verläuft, dass das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1 \dots q_s, \dot{q}_1 \dots \dot{q}_s) dt$$

ein Extremum annimmt. Dabei ist $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$ eine Funktion, die das gesamte System charakterisiert.

$L(q, \dot{q})$ nennt man Lagrangefunktion,
 S nennt man Wirkungsintegral.

Abbildung 3.2: Variation δq des wahren Weges $q(t)$ ¹

Betrachten wir zuerst ein System mit einem Freiheitsgrad q

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt$$

$q(t)$ ist die gesuchte Trajektorie des Teilchens. Wir suchen nun $q(t)$ so, dass S ein Minimum annimmt. Da wir aus dem Hamiltonschen Prinzip wissen, dass nur der wirkliche Weg $q(t)$ die Wirkung S minimiert, können wir zu $q(t)$ eine Funktion $\delta q(t)$ addieren und wissen dann, dass die Wirkung größer wird (vgl. Abb. 3.2). Diese Variation $\delta q(t)$ soll an den Endpunkten $q(t_1), q(t_2)$ verschwinden. Wir schreiben

$$q(t) + \delta q(t) = q(t) + \varepsilon \xi(t), \quad \xi(t_1) = \xi(t_2) = 0$$

mit einer kleinen Zahl ε und einer beliebigen Funktion $\xi(t)$. Dann können wir eine Taylorentwicklung der Lagrangefunktion durchführen

$$L(q + \varepsilon \xi, \dot{q} + \varepsilon \dot{\xi}) = L(q, \dot{q}) + \underbrace{\varepsilon \xi}_{\delta q} \frac{\partial L}{\partial q} + \underbrace{\varepsilon \dot{\xi}}_{\delta \dot{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

und sie in das Wirkungsintegral einsetzen

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \varepsilon \xi, \dot{q} + \varepsilon \dot{\xi}) dt = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt}_S + \varepsilon \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \left(\xi(t) \frac{\partial L}{\partial q} + \dot{\xi}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt}_{\delta S=0}$$

Dass δS verschwindet, ist ein äquivalenter Ausdruck für das Hamiltonsche Prinzip, analog zum Verschwinden der ersten Ableitung einer Funktion an einem Extrempunkt in der Analysis. Um den Ausdruck $\xi(t)$ umzuschreiben, führen wir eine partielle Integration durch

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\xi}(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt &= \xi(t) \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt \\ &= \underbrace{\xi(t_2)}_{=0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \underbrace{\xi(t_1)}_{=0} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} dt \end{aligned}$$

¹Bildquelle: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/7b/Variation.png/320px-Variation.png>

Damit können wir das Verschwinden der Variation der Wirkung schreiben als

$$0 = \delta S = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \xi(t) \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) dt$$

Da wir über $\xi(t)$ keine weiteren Annahmen gemacht haben, es also eine beliebige Funktion ist, muss der Ausdruck in Klammern verschwinden, damit das Integral für jedes ξ verschwindet. Es muss also gelten, dass

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$$

Damit haben wir die Euler-Lagrange-Gleichungen erhalten.

Beispiele

1. Als Beispiel betrachten wir die Bewegung eines Teilchens in einer Dimension in einem Potential $V(x)$.

$$\begin{aligned} T(x) &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2, & V(x) \\ L &= T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} = F(x) \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= \frac{d}{dt} m \dot{x} = m \ddot{x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \Leftrightarrow m \ddot{x} - F &= 0. \end{aligned}$$

Damit haben wir das 2. Newtonsche Gesetz erhalten.

2. Als nächstes Beispiel betrachten wir das Fadenpendel mit Fadenlänge s . Hier ist die generalisierte Koordinate φ . Die Koordinaten sind (vgl. Abb. 3.3)

$$\begin{aligned} x &= s \sin \varphi & \dot{x} &= s \dot{\varphi} \cos \varphi \\ y &= -s \cos \varphi & \dot{y} &= s \dot{\varphi} \sin \varphi \end{aligned}$$

Damit sind die Ausdrücke für kinetische und potentielle Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m s^2 \dot{\varphi}^2 \\ V &= mgy = -mgs \sin \varphi \\ L(\varphi, \dot{\varphi}) &= T - V = \frac{1}{2} m s^2 \dot{\varphi}^2 + mgs \cos \varphi \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -mgs \sin \varphi \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m s^2 \ddot{\varphi} \\ m s^2 \ddot{\varphi} + mgs \sin \varphi &= 0 \\ \Leftrightarrow \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{s} \sin \varphi \end{aligned}$$

Dies ist die bekannte Bewegungsgleichung für ein Pendel.

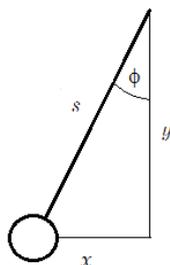


Abbildung 3.3: Skizze zum Fadenpendel

3.2.1 Generalisierte Impulse

Wir hatten bislang die generalisierten Koordinaten q_i und die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_i eingeführt. Der zugehörige generalisierte Impuls

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}.$$

im ersten Beispiel ist der generalisierte Impuls $\partial L / \partial \dot{x} = m\dot{x}$, also der bekannte lineare Impuls, beim Fadenpendel ist $\partial L / \partial \dot{\varphi} = ms^2\dot{\varphi}$, der Drehimpuls. Der generalisierte Impuls p_i ist erhalten, wenn

$$0 = \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}.$$

Das ist nach den Euler-Lagrange-Gleichungen gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

also wenn L *nicht* explizit von q abhängt. Man nennt q dann zyklische Koordinate.

Wenn wir beim ersten obigen Beispiel $V(x) = 0$ setzen, also das freie Teilchen untersuchen, ist $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ und der Impuls $p = m\dot{x}$ ist erhalten.

Wir haben die Euler-Lagrange-Gleichung aus dem Hamiltonschen Prinzip $\delta S = 0$ mit den Techniken der Variationsrechnung bestimmt.

Beispiele

Weitere Beispiele für die Anwendung dieses Kalküls sind

1. die Geodäte, d. i. die kürzeste Verbindung zweier Punkte A, B auf einer gegebenen Oberfläche. Die zu minimierende Größe ist die Länge ℓ dieser

Verbindung. Auf einer flachen Oberfläche ist das Wegelement

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ \ell &= \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ \ell &= \int_A^B \underbrace{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}_{L(y,y')} dx \end{aligned}$$

Die Analogien kann man in folgender Tabelle zusammenfassen:

Geodäte	Hamiltonsches Prinzip
x	t
y	q
y'	\dot{q}

Wir können hier auf die gleiche Weise wie beim Hamiltonschen Prinzip die Euler-Lagrange-Gleichung verwenden.

$$\begin{aligned} L(y, y') &= \sqrt{1 + (y')^2} \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ 0 &= \frac{d}{dx} \left\{ (1 + (y')^2)^{-1/2} y' \right\} \\ &= \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \\ \Rightarrow \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= C = \text{const.} \\ \Rightarrow (y')^2 &= C^2 + C^2(y')^2 \\ (y')^2(1 - C^2) &= C^2 \\ y' &= \sqrt{\frac{C^2}{1 - C^2}} = c_1 \\ y &= c_1 x + c_2, \end{aligned}$$

also wie erwartet eine Gerade.

Hier haben wir – in gleicher Weise wie beim Hamiltonschen Prinzip die Wirkung S – ein Funktional ℓ , das keine Abbildung von Zahlen auf Zahlen ist, sondern von Funktionen auf Zahlen abbildet. Das Funktional hängt also nicht von den Werten an einzelnen Punkten ab, sondern von der gesamten Funktion an allen Punkten.

2. das Fermatsche Prinzip: Ein Lichtstrahl auf seiner wirklichen Bahn zwischen zwei Punkten braucht eine kürzere Zeit als auf jeder anderen denk-

Abbildung 3.4: Die Brachistochrone²

baren »virtuellen« Bahn zwischen den beiden Punkten.

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$$T = \int_A^B \frac{ds}{c} = \int_A^B \underbrace{\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{c(x,y)}}_{L(x,y,y')} dx.$$

Dabei ist $c(x, y)$ die Lichtgeschwindigkeit im Medium.

3. die Brachistochrone: Dieses 1696 von Bernoulli gelöste Problem besteht darin die Bahn eines Körpers, der reibungsfrei von einem Punkt A zu einem Punkt B gleitet, so zu bestimmen, dass die Zeit der Bewegung minimal wird.

$$S = \int_A^B dt = \int_A^B \frac{ds}{v}$$

$$= \int_A^B \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}} dx, L(y, y') = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \sqrt{1+(y')^2}$$

Wir wenden die Euler-Lagrange-Gleichung an.

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

Diesen Ausdruck nach x abzuleiten wäre sehr kompliziert. Deshalb setzen wir nicht explizit in die Euler-Lagrange-Gleichung ein, sondern gehen aus von

$$y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{const},$$

was ein äquivalentes Vorgehen ist. Übertragen auf die Mechanik ($x \rightarrow t, y \rightarrow q$) ist dieser Ausdruck das Negative der Gesamtenergie.

$$\dot{q} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L = -H.$$

²Bildquelle: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Brachistochrone.png>

Um diesen Ausdruck zu zeigen, leiten wir ihn nach x ab; wenn die linke Seite konstant ist, muss die Ableitung verschwinden.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L \right) &= y'' \frac{\partial L}{\partial y'} + y' \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{dL}{dx} \\ &= y'' \frac{\partial L}{\partial y'} + y' \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} y' - \frac{\partial L}{\partial y'} y'' \\ &= y' \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Euler-Lagrange-Gleichungen ausgenutzt haben und die totale Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{df(x, y)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= \nabla f \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \end{aligned}$$

eingesetzt haben. Wir setzen jetzt in den Ausdruck $y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{const}$ ein und benennen die Konstante mit $1/a$.

$$\frac{-1}{\sqrt{2g}\sqrt{y}\sqrt{1+(y')^2}} = \frac{1}{a} \frac{1}{\sqrt{2g}}$$

Durch Kehrwertbildung erhält man

$$\begin{aligned} y(1+(y')^2) &= a^2 \\ y + (y')^2 y &= a^2 \\ y' &= \sqrt{\frac{a^2 - y}{y}} \end{aligned}$$

Wir lösen diese Differentialgleichung durch Separation der Variablen und

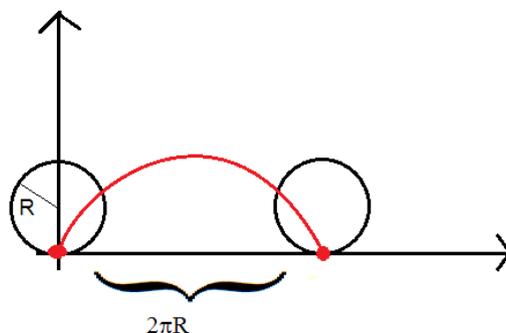


Abbildung 3.5: Zyklode

erhalten³

$$\begin{aligned}
 \int dx &= \int dy \sqrt{\frac{y}{a^2 - y}} \\
 \Leftrightarrow x + c &= \int dy \sqrt{\frac{y/a^2}{1 - y/a^2}} = a^2 \int \sqrt{\frac{z}{1 - z}} dz \\
 &= a^2 \lambda dz = 2a^2 \int \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} d\lambda \\
 &= 2a^2 \left(\frac{1}{2} \arctan \lambda - \frac{\lambda}{2(1 + \lambda^2)} \right) \\
 \Leftrightarrow x + c &= a^2 \left(-\sqrt{z(1 - z)} + \arctan \sqrt{\frac{z}{1 - z}} \right)
 \end{aligned}$$

Wenn wir $A = (0, 0)$ als Anfangspunkt setzen, ist $c = 0$ und wir erhalten

$$\frac{x}{a^2} = \arctan \sqrt{\frac{y}{a^2 - y}} - \frac{1}{a^2} \sqrt{y(a^2 - y)}.$$

Der Wert von a^2 bestimmt sich aus dem Endpunkt.

Diese Kurve kann man als Zyklode darstellen (vgl. Abb. 3.5). Eine Zy-

³Die Substitution $z = y/a^2$ führt auf den Radikanden

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{1 - z} &= \lambda^2 \\
 \Rightarrow z &= \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2} \\
 2\lambda d\lambda &= \frac{z + (1 - z)}{(1 - z)^2} dz = \frac{1}{1 - z^2} dz \\
 dz &= 2\lambda(1 - z^2) d\lambda = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2} d\lambda.
 \end{aligned}$$

kloide wird durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned}x &= \varphi R - R \sin \varphi \\y &= R - R \cos \varphi\end{aligned}$$

beschrieben. Mit $\varphi = 2\beta$ kann man dies schreiben als

$$\frac{x}{R} = 2\beta - \sin 2\beta.$$

Wenn wir $y = a^2 \sin^2 \beta$ setzen und in die Brachistochrone einsetzen, ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{x}{a^2} &= \arctan \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 \beta}{a^2 (1 - \sin^2 \beta)}} - \frac{1}{a^2} \sqrt{a^2 \sin^2 \beta \underbrace{(a^2 - a^2 \sin^2 \beta)}_{a^2 \cos^2 \beta}} \\&= \beta - \frac{1}{2} \sin 2\beta \\ \frac{2x}{a^2} &= 2\beta - \sin^2 \beta.\end{aligned}$$

Nach dem vorherigen Absatz beschreibt dies eine Zykloide mit Radius $R = a^2/2$.

Wir betrachten nun mehrere Freiheitsgrade. Bei zwei Freiheitsgraden haben wir die unabhängigen generalisierten Koordinaten q_1, q_2 und die generalisierten Geschwindigkeiten \dot{q}_1, \dot{q}_2 und als Ausdruck für die Wirkung

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) dt.$$

Die Variation führen wir in beiden Koordinaten unabhängig durch

$$\begin{aligned}q_1(t) &\rightarrow q_1(t) + \varepsilon \xi(t) \\q_2(t) &\rightarrow q_2(t) + \varepsilon \eta(t) \\ \xi(t_1) &= \xi(t_2) = \eta(t_1) = \eta(t_2) = 0.\end{aligned}$$

Die Variation der Lagrangefunktion ist damit

$$\begin{aligned}&L(q_1 + \varepsilon \xi, q_2 + \varepsilon \eta, \dot{q}_1 + \varepsilon \dot{\xi}, \dot{q}_2 + \varepsilon \dot{\eta}) \\&= L(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) + \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{\xi} \right) + \varepsilon \left(\frac{\partial L}{\partial q_2} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \dot{\eta} \right) \\ \delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q_1} \xi + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{\xi} + \frac{\partial L}{\partial q_2} \eta + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \dot{\eta} \right) dt = 0\end{aligned}$$

Wir führen analog zum eindimensionalen Fall eine partielle Integration durch.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \dot{\xi} dt = \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \xi \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) dt.$$

Damit ist die Variation der Wirkung

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \xi(t) \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right)}_{=0} + \eta(t) \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q_2} + \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right)}_{=0} \right\} dt$$

Da die Funktionen ξ und η unabhängig voneinander sind, müssen die beiden Ausdrücke in runden Klammern unabhängig voneinander verschwinden. Dieses Argument gilt in gleicher Weise, wenn wir statt zwei Freiheitsgraden die Variation für s generalisierte Koordinaten durchführen. Die Euler-Lagrange-Gleichungen für ein System mit s Freiheitsgraden lauten

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, s$$

Dies sind also s Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Das Keplerproblem im Lagrange-Formalismus

Wir betrachten einen Massepunkt in $d = 2$ Dimensionen in einem Zentralpotential $V(r)$.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi & \dot{x} &= \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi \\ y &= r \sin \varphi & \dot{y} &= \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

Die kinetische Energie ist dann

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)$$

und die Lagrangefunktion

$$L(r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - V(r)$$

Wir sehen direkt, dass die Koordinate φ zyklisch ist, sodass der generalisierte Impuls erhalten ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \varphi}}_{=0} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= 0 \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\varphi}) &= 0 \\ \ell = mr^2 \dot{\varphi} &\text{ ist erhalten.} \end{aligned}$$

Dies ist die Drehimpulserhaltung.

Die Euler-Lagrange-Gleichung für r lautet

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} &= \frac{d}{dt} m\dot{r} = m\ddot{r} \\ \frac{\partial L}{\partial r} &= m r \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r} \\ m\ddot{r} - m r \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} &= 0\end{aligned}$$

Der Ausdruck $m r \dot{\varphi}^2$ kann als Zentripetalkraft interpretiert werden. Wenn wir $\dot{\varphi}^2$ über den Drehimpuls $\ell = m r^2 \dot{\varphi}$ ausdrücken, erhalten wir

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}^2 &= \frac{\ell^2}{m^2 r^4} \\ \Rightarrow m\ddot{r} - \frac{\ell^2}{m r^3} + \frac{\partial V}{\partial r} &= 0\end{aligned}$$

Der mittlere Term ist die Drehimpulsbarriere.

Da φ zyklisch ist, die Lagrangefunktion also nicht von φ abhängt, ändert eine Drehung L nicht. Man bezeichnet dies als Drehinvarianz. Analog hat man beim freien Teilchen mit der Lagrangefunktion

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

Translationsinvarianz, da x, y, z zyklische Koordinaten sind, L also nicht von der Lage im Raum abhängt.

Dies sind Beispiele für das Noethersche Theorem:

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie gehört eine Erhaltungsgröße.

Symmetrie	Erhaltungsgröße
Translation im Raum	linearer Impuls
Drehung im Raum	Drehimpuls
Translation in der Zeit	Energie

Das Noether-Theorem wurde von der Mathematikerin Emmy Noether (1882—1935) aufgestellt.

Kapitel 4

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen

Bis jetzt haben wir die analytische Mechanik mit der Lagrangefunktion L in n Freiheitsgraden mit den Euler-Lagrange-Gleichungen betrieben

$$L = T - V$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$
$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

Dieser Formalismus liefert n Bewegungsgleichung 2. Ordnung. Die Lagrangefunktion hat zwar die Einheit einer Energie, aber sie ist nicht erhalten. Das wäre der Fall für die Gesamtenergie $T + V$. Die Hamiltonfunktion des Hamiltonformalismus, den wir jetzt entwickeln wollen, ist gerade der Ausdruck für die Gesamtenergie.

Wir bilden die Zeitableitung der Lagrangefunktion.

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i \right\}, \end{aligned}$$

wobei wir die Euler-Lagrange-Gleichung auf den ersten Summanden angewandt haben. Wegen $\ddot{q}_i = \frac{d}{dt} \dot{q}_i$ können wir die Summe mit der Produktregel schreiben als

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) \\ &\equiv \frac{d}{dt} \left(L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = 0 \\ &\Rightarrow L(q_i, \dot{q}_i) - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i =: -H = \text{const.} \end{aligned}$$

Zur Veranschaulichung betrachten wir kartesische Koordinaten x_i :

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} m \dot{x}_i \\
 L &= T(\dot{x}_i) - V(x_i) \\
 \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i &= \sum_i \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \\
 &= \sum_i m \dot{x}_i^2 = 2T \\
 -H &= L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \\
 &= T - V - 2T \\
 &= -T - V \\
 \Leftrightarrow H &= T + V
 \end{aligned}$$

In generalisierten Koordinaten sieht die kinetische Energie i. Allg. anders aus, z. B. in ebenen Polarkoordinaten (wie im Keplerproblem)

$$T = \frac{1}{2} m (r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2).$$

Damit ist noch zu zeigen, dass $H = T + V$ auch in generalisierten Koordinaten die Gesamtenergie beschreibt. Wir können die Ortsvektoren ausdrücken durch die generalisierten Koordinaten

$$\vec{r}_i(q_1, \dots, q_n) \quad i = 1, \dots, N$$

für ein N -Teilchen-System mit n Freiheitsgraden. Die kinetische Energie können wir dann ausdrücken als

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_i)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j,k} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right) \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right).
 \end{aligned}$$

Da T somit quadratisch in den \dot{q}_ℓ ist, können wir schreiben

$$\sum_{\ell} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\ell} \dot{q}_\ell = 2T$$

und das entspricht unserem Ergebnis in kartesischen Koordinaten, sodass wir direkt schreiben können

$$\Rightarrow H = T + V.$$

Die Variablen, in denen wir die Lagrangefunktion L ausdrücken, sind q_i, \dot{q}_i . Die natürlichen Koordinaten der Hamiltonfunktion H sind jedoch p_i, q_i . Den Übergang erhalten wir durch die Legendre-Transformation. Wir stellen dazu

eine Vorüberlegung an und bestimmen das totale Differential einer Funktion $f(x, y)$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \\ &= u(x, y) dx + v(x, y) dy \\ \text{mit } u(x, y) &= \frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } v(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun eine neue Funktion

$$g = f - y \frac{\partial f}{\partial y} = f - yv$$

und bilden wieder das totale Differential

$$\begin{aligned} dg &= df - d(yv) \\ &= u dx + v dy - v dy - y dv \\ &= u dx - y dv \end{aligned}$$

Die so definierte Funktion $g(x, v)$ nennt man die Legendre-Transformierte von $f(x, y)$.

Wir wenden dies nun auf die Transformation der Lagrange- zur Hamiltonfunktion an.

$$\begin{aligned} L(q, \dot{q}) \\ dL &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} \\ -dH &= dL - d(p\dot{q}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial q} dq + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} d\dot{q} - p d\dot{q} - \dot{q} dp \end{aligned}$$

mit dem generalisierten Impuls $p = \partial L / \partial \dot{q}$.

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial q} dq + \dot{q} dp$$

Wenn wir $H(p, q)$ haben, ergibt sich für das totale Differential

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq.$$

Wir führen einen Koeffizientenvergleich durch und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= -\frac{\partial L}{\partial q} = -\dot{p}, \end{aligned}$$

wobei wir bei der zweiten Gleichung die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}}_p = \dot{p}$$

ausgenutzt haben. Die beiden Formeln

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \dot{q} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q} = -\dot{p} \quad (4.2)$$

sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen. Anders als die Euler-Lagrange-Gleichungen, die zweiter Ordnung in der Zeit sind, handelt es sich hier um Differentialgleichungen erster Ordnung.

Beispiele

Harmonischer Oszillator in einer Dimension. Beim harmonischen Oszillator sind kinetische und potentielle Energie gegeben durch

$$T = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 \quad V = \frac{k}{2}q^2.$$

Die Lagrangefunktion ist damit

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{k}{2}q^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \quad \frac{\partial L}{\partial q} = -kq$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind in diesem Fall also wegen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\ddot{q}$$

$$m\ddot{q} + kq = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0,$$

also die bekannten Bewegungsgleichungen eines harmonischen Oszillators. Nun bestimmen wir die Hamiltonfunktion.

$$H = -L + p\dot{q}$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{p}{m}$$

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2}m\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2 + p\dot{q}$$

$$= -\frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} + \frac{k}{2}q^2 + p\frac{p}{m}$$

$$= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2.$$

Wir können die Hamiltonfunktion statt über die Legendre-Transformation auch über $H = T + V$ bestimmen

$$H = T + V = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{k}{2}q^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2.$$

Die Hamiltonschen Bewegungsgleichung lauten in diesem Fall

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p} &= \dot{q} \\ \Rightarrow \frac{p}{m} &= \dot{q} \\ \frac{\partial H}{\partial q} &= kq \\ \Rightarrow -kq &= \dot{p} \\ \Leftrightarrow \dot{p} &= m\ddot{q} \\ -kq &= m\ddot{q} \\ m\ddot{q} + kq &= 0.\end{aligned}$$

Dies sind die oben auf anderem Wege erhaltenen Bewegungsgleichungen.

In n Freiheitsgraden haben wir n generalisierte Koordinaten und deren Ableitungen in der Lagrangefunktion $L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Über eine analoge Rechnung wie oben erhält man die Hamiltonfunktion

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$$

mit den Bewegungsgleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Wenn eine Koordinate zyklisch ist, also in der Lagrangefunktion nicht vorkommt

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

ist der zugehörige generalisierte Impuls erhalten

$$\dot{p}_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Dies gilt auch beim Hamiltonformalismus: wenn q_j nicht explizit in H auftaucht, ist q_j zyklisch

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial q_j} &= 0 \Rightarrow \dot{p}_j = 0 \\ p_j &= c_j = \text{const.}\end{aligned}$$

In diesem Fall kann man die Hamiltonfunktion schreiben als

$$H(q_1, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{j-1}, c_j, p_{j+1}, \dots, p_n).$$

Wenn alle generalisierten Koordinaten zyklisch sind, hängt die Hamiltonfunktion nur noch von den konstanten Impulsen c_i ab.

$$H(p_1, \dots, p_n) = H(\underbrace{c_1, \dots, c_n}_{\text{Konstanten}}) = \text{const.}$$

Die Bewegungsgleichungen für die Impulse sind nach Voraussetzung trivial $\dot{p}_i = 0$; die Bewegungsgleichungen für die Koordinaten sind dann

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial c_i} = \alpha_i = \text{const} \\ q_i &= \alpha_i t + \beta_i.\end{aligned}$$

Wenn man dies machen kann, nennt man das System integrabel und es tritt kein chaotisches Verhalten auf. Man hat also genauso viele Erhaltungsgrößen wie Freiheitsgrade. Diese Transformation auf geeignete Koordinaten, sodass die Bewegungsgleichungen trivial lösbar sind, bezeichnet man als Hamilton-Jacobi-Formalismus.

Wenn n Koordinaten zyklisch sind, heißt das, dass wir n Erhaltungsgrößen haben und man nennt das System integrabel, wobei n der Anzahl der Freiheitsgrade des Systems entspricht. In der Praxis ist es eventuell schwierig die zyklischen Koordinaten zu identifizieren.

Was sind nun die Vorteile dieses Formalismus gegenüber dem Lagrangeformalismus, wenn die Bewegungsgleichungen dieselben sind? In einigen Fällen ist der Hamiltonformalismus praktischer, und in einigen Fällen ist der Hamiltonformalismus notwendig, z. B. in der Thermodynamik oder bei der Untersuchung chaotischer Systeme. Zudem hat man die Energie direkt gegeben. Auch die Verwendung von Differentialgleichungen 1. Ordnung bringt Vorteile. Außerdem ist der Hamiltonformalismus für den Übergang zur Quantenmechanik notwendig.

Den von den q_i und p_i aufgespannte $2n$ -dimensionale Raum nennt man Phasenraum. Die Bewegung eines Systems im Phasenraum ist gegeben durch die Phasenraumtrajektorie $(q_i(t), p_i(t))$. Als Beispiel für eine Phasenraumtrajektorie betrachten wir den harmonischen Oszillator

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2.$$

Die Bewegungsgleichung hatten wir oben bereits aufgestellt. Die Lösung ist

$$\begin{aligned}q(t) &= a \sin \omega t + b \cos \omega t \\ p(t) &= a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t \\ \text{mit } \omega &= \sqrt{\frac{k}{m}}.\end{aligned}$$

Die zugehörige Phasenraumtrajektorie ist eine Ellipse. Durch Quadrieren erhält man

$$\frac{q^2}{a^2 + b^2} + \frac{p^2}{\omega^2(a^2 + b^2)} = 1,$$

die bekannte Darstellung einer Ellipse in kartesischen Koordinaten. Die Konstanten a, b bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen, und somit auch der Energie. Je nach dem Wert der Gesamtenergie hat die Ellipse unterschiedliche Halbachsen. Die Erhaltungsgröße Energie bestimmt somit, auf welcher Ellipse das System sich durch den Phasenraum bewegt.

Mathematischer Einschub: Der ε -Tensor und das Kronecker- δ

Es sei A eine 3×3 -Matrix, und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{r}$ Vektoren mit drei Komponenten. Dabei gelte

$$A\vec{a} = \vec{b}.$$

In Komponenten aufgeschrieben lautet diese Beziehung

$$\sum_j A_{ij} a_j = b_i.$$

Eine besonders einfache Matrix ist die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{in Komponenten } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\sum_j \delta_{ij} a_j = a_i.$$

Die Einheitsmatrix bzw. das Kroneckerdelta hat verschiedene Eigenschaften.

1. Sie ist symmetrisch, also $\mathbf{1}^T = \mathbf{1}$.

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

2. Die Spur über die Einheitsmatrix ist gleich der Dimension n des Raumes, in dem sie definiert ist, also in unserem Falle 3:

$$\text{Sp } \mathbf{1} = \sum_i \delta_{ii} = n = 3 =$$

3. Das Produkt von Einheitsmatrizen ist die Einheitsmatrix

$$\sum_j \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$$

4. Das Kroneckerdelta bietet eine einfache Möglichkeit zum Umbenennen von Indizes

$$\sum_k A_{ijk} \delta_{k\ell} = A_{ij\ell}.$$

Man kann mit dem Kroneckerdelta auch das Skalarprodukt umschreiben als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_i a_i b_i = \sum_{i,j} a_i \underbrace{b_j \delta_{ji}}_{b_i}$$

Nun wollen wir auch das Vektorprodukt mit Matrizen ausdrücken. Es gilt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Dazu benötigen wir den Levi-Civita-Tensor oder ε -Tensor, der definiert ist durch

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & i, j, k \text{ gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1 & i, j, k \text{ ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$1 = \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312}$$

$$-1 = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321}$$

$$0 = \varepsilon_{112} = \varepsilon_{221} = \varepsilon_{333} = \dots$$

Damit können wir das Kreuzprodukt schreiben als

$$(\vec{c})_i = (\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

$$c_1 = \sum_{j,k} \varepsilon_{1jk} a_j b_k = \varepsilon_{123} a_2 b_3 + \varepsilon_{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

$$c_2 = \varepsilon_{213} a_1 b_3 + \varepsilon_{231} a_3 b_1 = a_3 b_1 - a_1 b_3$$

$$c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Wir geben nun die Eigenschaften des ε -Tensors an:

1. Das Produkt zweier ε -Tensoren mit unterschiedlichen Indizes kann als Determinante geschrieben werden.

$$\varepsilon^{abc} \varepsilon^{def} = \begin{vmatrix} \delta^{ad} & \delta^{ae} & \delta^{af} \\ \delta^{bd} & \delta^{be} & \delta^{bf} \\ \delta^{cd} & \delta^{ce} & \delta^{cf} \end{vmatrix}$$

$$\text{Bsp.: } \varepsilon^{123} \varepsilon^{123} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

2. Wenn man über einen gemeinsamen Index zweier ε -Tensoren summiert, erhält man

$$\sum_c \varepsilon^{abc} \varepsilon^{dec} = \delta^{ad} \delta^{be} - \delta^{ae} \delta^{ba}$$

als Spezialfall der ersten Eigenschaft.

3. Summation über zwei gemeinsame Indizes liefert

$$\sum_{b,c} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{dbc} = 2\delta^{ad}$$

4. Summation über drei gemeinsame Indizes

$$\sum_{a,b,c} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{abc} = 6$$

als Anwendung der vorherigen Eigenschaft.

5. Summation über zwei gleiche Indizes einer Matrix liefert

$$\sum_{a,b} \varepsilon^{abc} \delta^{bc} = 0.$$

Unter Verwendung dieser Beziehungen kann man leicht Beziehungen von mehrfachen Kreuz- und Skalarprodukten herleiten, die im folgenden Kapitel von Nutzen sein werden.

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) &= \sum_{i,j,\ell,m,k} \varepsilon^{ij\ell} a^j b^\ell \varepsilon^{ikm} c^k d^m \\ &= (\delta^{jk} \delta^{\ell m} - \delta^{jm} \delta^{\ell k}) a^j b^\ell c^k d^m \\ &= (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}) \end{aligned}$$

Die Graßmann-Identität oder $bac - cab$ -Regel:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}))_i &= \vec{a} \times \sum_{\ell m} \varepsilon_{k\ell m} b_\ell c_m \\ &= \sum_{j k \ell m} \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{k\ell m} b_\ell c_m \\ &= \sum_{j k \ell m} (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) a_j b_\ell c_m \\ &= b_i (\vec{a}\vec{c}) - c_i (\vec{a}\vec{b}). \end{aligned}$$

Man kann den ε -Tensor auch benutzen, um Vektordifferentialoperatoren auszudrücken.

$$\begin{aligned} (\text{grad } \varphi)_k &= (\nabla \varphi)_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \partial_k \varphi \\ (\text{rot } \varphi)_k &= (\nabla \times \vec{a})_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \partial_i a_j \\ (\text{rot grad } \varphi)_k &= (\nabla \times (\nabla \varphi))_k = \sum_{i,j} \varepsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \varphi \\ &= \sum_{ij} \varepsilon_{jik} \partial_i \partial_j \varphi = 0, \end{aligned}$$

wenn φ zweimal stetig differenzierbar ist, so dass man den Satz von Schwarz anwenden darf.

Kapitel 5

Der starre Körper

Bislang haben wir Massenpunkte betrachtet. Weil die Welt aber aus ausgedehnten Körpern besteht, betrachten wir nun ausgedehnte Körper, die wir als Massenpunkte mit festen Abständen auffassen können (vgl. Abb. 5.1). Wie viele generalisierte Koordinaten braucht man um einen starren Körper zu beschreiben, d. h. äquivalent wie viele Freiheitsgrade hat ein solcher Körper? Man kann sich dies auf drei Arten überlegen, die alle zum selben Ergebnis führen, nämlich sechs Freiheitsgraden:

1. Wir können die Lage eines Punktes A auf dem Körper angeben durch drei räumliche Koordinaten. Die Lage eines weiteren Punktes B des Körpers kann ich durch zwei ebene Koordinaten angeben sowie einen Drehwinkel um die Achse AB .
2. Wir können die Lage eines Körpers durch die Position seines Schwerpunktes angeben, für die wir drei Koordinaten brauchen; außerdem kann sich der Körper um seinen Schwerpunkt drehen, so dass wir drei Winkel benötigen, um die Drehung zu beschreiben.
3. Wir können den Körper durch die Angabe der Position von drei Punkten auf dem Körper angeben, wie ja auch eine Ebene im \mathbb{R}^3 durch drei Punkte festgelegt ist. Diese neun Koordinaten reduzieren sich auf sechs, weil durch die drei Zwangsbedingungen der festen Abstände drei Koordinaten durch die übrigen ausgedrückt werden können.

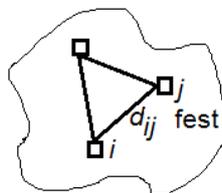


Abbildung 5.1: Der starre Körper.

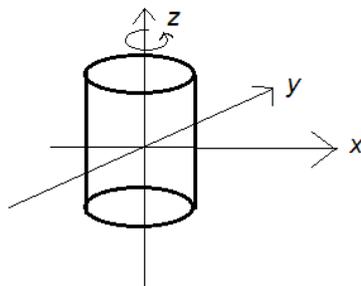


Abbildung 5.2: Ein starrer Zylinder als Beispiel für einen starren Körper.

Wir können die drei Bewegung eines starren Körpers durch zwei Koordinatensysteme beschreiben, ein körperfestes System, wie es ein mitbewegter Beobachter auf dem Körper wahrnimmt, und ein raumfestes System. Auf der Erde kann das körperfeste System z. B. Länge, Breite und Höhe sein, also Kugelkoordinaten. Ein Beobachter im Weltraum hätte dann ein raumfestes System und könnte die Bewegung der Erde um die Sonne beobachten. Das raumfeste System nennt man auch Inertialsystem. Ein Inertialsystem ist ein System, in dem das 2. Newtonsche Axiom gilt. Bisher haben wir immer Inertialsysteme betrachtet.

Newton war der Ansicht, dass es einen absoluten Raum gibt. Inertialsysteme sind solche, die sich bezüglich des absoluten Raumes gleichförmig bewegen.

Absolute space, in its own nature and with regard to anything external, always remains similar and unmovable.

Wenn die Koordinaten des absoluten Raums als \vec{r} bezeichnet werden, so gilt das 2. Newtonsche Axiom ebenfalls in einem relativ dazu gleichförmig bewegten Raum mit den Koordinaten \vec{r}' , das gegeben ist durch

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t$$

mit einer konstanten Geschwindigkeit \vec{v} .

Jede Bewegung eines starren Körpers lässt sich zusammensetzen aus einer Translation und einer Drehung. Die Verschiebungen sind uns von den Massepunkten bereits wohlbekannt, so dass wir uns nun auf die Drehungen konzentrieren. Wir bezeichnen die Koordinaten im körperfesten System mit $\vec{r}^{(K)}$, die im raumfesten System mit $\vec{r}^{(R)}$. Den Zusammenhang zwischen den beiden Systemen beschreiben wir durch eine Matrix $R(t)$, so dass

$$\vec{r}^{(R)}(t) = R(t)\vec{r}^{(K)}.$$

Als Beispiel sehen wir uns die Bewegung eines Punktes auf einem rotierenden Zylinder (vgl. Abb. 5.2). Im körperfesten System habe der Punkt die Koordinaten

$$\vec{r}^{(K)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

dann wird die Drehung um die z -Achse durch die Matrix

$$R(t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Die Zeitabhängigkeit des Drehwinkels φ wird beschrieben durch die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi/\text{Periode}$ gemäß

$$\varphi(t) = \omega t.$$

Im raumfesten System hat der Punkt auf dem Zylinder damit in Abhängigkeit von der Zeit die Koordinaten

$$\vec{r}^{(R)} = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ \sin \omega t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ein näherungsweise Beispiel für einen torkelnden Zylinder ist der kleine Saturnmond Hyperion.

Der starre Körper hat die Zwangsbedingungen, dass die Abstände zwischen zwei Punkten konstant sind. Daraus folgt als Bedingung für die Drehmatrix R , dass sie orthogonal sein muss. Wir fordern außerdem $\det R = 1$, so dass Raumspiegelungen ausgeschlossen sind, damit kein Rechtssystem in ein Linkssystem überführt wird.

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= R\vec{r} \\ r &= \sqrt{\vec{r}'^2} = \sqrt{\sum_i (r'_i)^2} \\ \sum_i (\vec{r}'_i)^2 &\stackrel{!}{=} \sum_i (r'_i)^2 = \sum_{i,j,k} (R_{ij}r_j)(R_{ik}r_k) \\ \sum_{i,j,k} R_{ij}R_{ik}r_jr_k &= \sum_i r_i r_i \end{aligned}$$

Die Summe auf der rechten Seite kann man auch schreiben als

$$\begin{aligned} \sum_i r_i r_i &= \sum_{j,k} \delta_{jk} r_j r_k \\ \Rightarrow \sum_i R_{ij}R_{ik} &= \delta_{jk} \\ \Leftrightarrow \sum_i (R^T)_{ji}R_{ik} &= \delta_{jk} \\ R^T R &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

$R^T R = R R^T = \mathbf{1}$ ist gerade die Eigenschaft, die eine orthogonale Matrix definiert. Für orthogonale Matrizen gilt somit $R^{-1} = R^T$.

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(R)}(t) &= R(t)\vec{r}^{(K)} \\ R^T(t)\vec{r}^{(R)}(t) &= \underbrace{R^T(t)R(t)}_{\mathbf{1}}\vec{r}^{(K)} = \vec{r}^{(K)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Transformation vom einen System ins andere durch

$$\vec{r}^{(R)} = R\vec{r}^{(K)} \quad (5.1)$$

$$\vec{r}^{(K)} = R^T\vec{r}^{(R)}. \quad (5.2)$$

Eine andere Art von Matrizen, die bei der Behandlung von Drehungen auftaucht, ist die antisymmetrische Matrix, für die $R^T = -R$ gilt. Daraus folgt insbesondere, dass alle Diagonalelemente verschwinden. Wenn wir die Zeitableitung von $\vec{r}^{(R)}(t)$ bilden, erhalten wir

$$\dot{\vec{r}}^{(R)} = \dot{R}(t)\vec{r}^{(K)} = \underbrace{\dot{R}(t)R^T(t)}_{\text{antisymmetrische Matrix}} \vec{r}^{(R)}.$$

Wir zeigen nun, dass $\dot{R}R^T$ eine antisymmetrische Matrix ist. Wir verwenden dazu die Hilfsformel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(RR^T) &= \dot{R}R^T + R\dot{R}^T \\ &= \frac{d}{dt}\mathbf{1} = 0 \\ (\dot{R}R^T)^T &= R\dot{R}^T = -\dot{R}R^T. \end{aligned}$$

Jede antisymmetrische 3×3 -Matrix A_{ij} kann man schreiben als $A_{ij} = \sum_k \varepsilon_{ijk}\omega_k$.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \varepsilon_{11\dots} \dots = 0 \\ A_{22} &= A_{33} = 0 \\ A_{12} &= \sum_k \varepsilon_{12k}\omega_k = \varepsilon_{123}\omega_3 \\ A_{21} &= \sum_k \varepsilon_{21k}\omega_k = \varepsilon_{213}\omega_3. \\ A_{ij} &= \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{r}}^{(R)} &= \dot{R}R^T\vec{r}^{(K)} \\ \dot{r}_i^{(R)} &= \sum_j (\dot{R}R^T)_{ij}r_j^{(K)} \\ &= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk}\omega_k r_j^{(K)} \\ \Rightarrow \dot{\vec{r}}^{(R)} &= \vec{\omega} \times \vec{r}^{(R)} = -\vec{r}^{(R)} \times \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Die physikalische Bedeutung von $\vec{\omega}$ ist die folgende: ω hat die Richtung der momentanen Drehachse, ist also in unserem raumfesten System parallel zur z -Achse.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

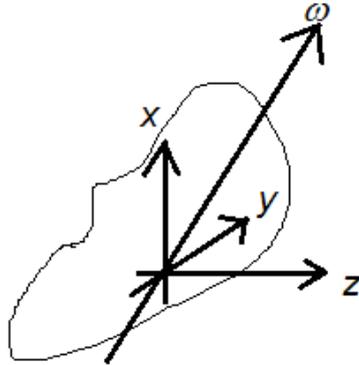


Abbildung 5.3: Starrer Körper mit Drehachse

Da das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ senkrecht auf den Vektoren \vec{a}, \vec{b} steht, ist bei der Drehung die Geschwindigkeit immer senkrecht zum Ortsvektor und zur Drehachse.

Der Vektor $\vec{\omega}$ ist allerdings kein gewöhnlicher Vektor wie der Ort oder die Geschwindigkeit. Dies sieht man am Verhalten unter einer Paritätstransformation, also einer durch

$$P : x_i \rightarrow -x_i$$

beschriebenen Raumspiegelung. Bei Anwendung von P auf \vec{r} und $\dot{\vec{r}}$ ergibt sich

$$P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$P \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{x} \\ -\dot{y} \\ -\dot{z} \end{pmatrix}$$

Wenn wir P jedoch auf den Drehimpuls $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ anwenden, ergibt sich

$$P\vec{L} = m(-\vec{r}) \times (-\dot{\vec{r}}) = \vec{L}.$$

\vec{L} und auch $\vec{\omega}$ bezeichnet man wegen dieses Verhalten als Axialvektoren.

Aus den oben hergeleiteten Beziehungen

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{r}_{(R)} = R(t)\vec{r}_{(K)}$$

wollen wir nun Drehimpuls und Energie eines rotierenden starren Körpers bestimmen. Die Massenverteilung des Körpers sei durch seine Dichteverteilung $\rho(\vec{r})$ gegeben; in diesem Fall ist die Masse gegeben durch

$$M = \int d^3r \rho(\vec{r}).$$

Der Schwerpunkt ergibt sich aus

$$\vec{R}_S = \frac{\int d^3r \vec{r} \varrho(\vec{r})}{\int d^3r \varrho(\vec{r})}.$$

Der Drehimpuls ergibt sich – ebenfalls als Verallgemeinerung des N -Teilchensystems auf eine kontinuierliche Verteilung – gemäß der Gleichung

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int d^3r \varrho(\vec{r}) (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \int d^3r \varrho(\vec{r}) \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Das doppelte Kreuzprodukt können wir auflösen gemäß (vgl. den Mathematischen Einschub)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \int d^3r \varrho(\vec{r}) ((\vec{r}^2 \vec{\omega} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{\omega})) \\ L_k &= \int d^3r \varrho(\vec{r}) ((\vec{r}^2 \omega_k - r_k \sum_j r_j \omega_j) \end{aligned}$$

Wir wollen den Drehimpuls ausdrücken durch eine Beziehung der Form

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \Theta \vec{\omega} \\ L_k &= \sum_j \Theta_{kj} \omega_j \end{aligned}$$

mit einer Matrix Θ . Im obigen Ausdruck für L_k stehen ω_j und ω_k , die nicht notwendigerweise gleich sind. Wir verwenden nun das Kroneckerdelta und die Beziehung

$$\sum_j \delta_{kj} \omega_j = \omega_k,$$

um den Ausdruck für L_k auf die gewünschte Form zu bringen

$$L_k = \sum_j \int d^3r \varrho(\vec{r}) \underbrace{\{\vec{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k\}}_{\Theta_{jk} \text{ Trägheitstensor}} \omega_j.$$

Wir haben also den Drehimpuls in der Form $L_k = \sum_j \Theta_{jk} \omega_j$ ausgedrückt mit einer symmetrischen Matrix ($\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$)

$$\Theta_{jk} = \int d^3r \varrho(\vec{r}) ((\vec{r}^2 \delta_{jk} - r_j r_k)$$

Wir rechnen als Beispiel den Trägheitstensor eines Zylinders mit konstanter Dichte ϱ , Radius a und Höhe h aus. Wir verwenden dazu Zylinderkoordinaten

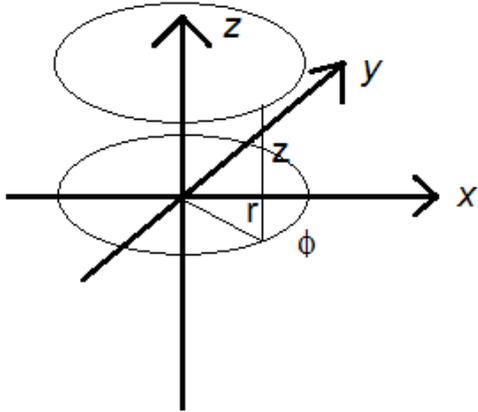


Abbildung 5.4: Zylinderkoordinaten

R, φ, z , wobei der Zylinder im Koordinatenursprung zentriert ist (vgl. Abb. 5.4).

$$\begin{aligned}
 \Theta^{zz} &= \varrho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a R dR (\bar{r}^2 - z^2) \\
 &= \varrho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a R dR R^2 \\
 &= \varrho h 2\pi \frac{a^2}{4} \\
 &= M \frac{a^2}{2}. \\
 \Theta^{xx} &= \varrho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a R dR (\bar{r}^2 - x^2) \\
 &= \varrho \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a R dR (R^2 \sin^2 \varphi + z^2) \\
 &= \varrho \frac{z^3}{3} 2\pi \frac{a^2}{2} \Big|_{-h/2}^{h/2} + \varrho h \frac{R^4}{4} \Big|_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\
 &= \varrho \frac{h^3 \pi}{3 \cdot 4} a^2 + \varrho h \frac{a^4}{4} \pi \\
 &= M \left(\frac{h^2}{12} + \frac{a^2}{4} \right) \\
 &= \frac{M}{12} (h^2 + 3a^2)
 \end{aligned}$$

wobei wir verwendet haben, dass

$$\begin{aligned}x &= R \cos \varphi \\y &= R \sin \varphi \\x^2 + y^2 + z^2 - x^2 &= y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \varphi^2 + z^2 \\ \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi &= -\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}.\end{aligned}$$

Außerdem ist $\Theta^{yy} = \Theta^{xx}$ wegen der vollen Drehsymmetrie des homogenen Zylinders.

Jetzt müssen wir noch die Nichtdiagonalelemente des Trägheitstensors ausrechnen. Dabei können wir Symmetrien ausnutzen. Das Element

$$\Theta^{xy} = - \int d^3r \varrho(\vec{r})xy$$

muss verschwinden, weil in den vier Quadranten, in die der Zylinder durch die xz - und yz -Ebene geteilt wird, das Produkt xy den gleichen Betrag, aber verschiedenes Vorzeichen hat, so dass das Element Θ^{xy} verschwindet. Das gleiche gilt für die anderen Nebendiagonalelemente; also ist der Trägheitstensor des homogenen Zylinders

$$\Theta = \begin{pmatrix} \frac{M}{12}(h^2 + 3a^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M}{12}(h^2 + 3a^2) & 0 \\ 0 & 0 & M\frac{a^2}{2} \end{pmatrix}$$

Die Achsen x, y, z bezeichnet man hier als Hauptträgheitsachsen. Wenn wir die Drehachse ω entlang einer der Hauptträgheitsachsen legt, ist $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$. Dann ist die Gleichung $\vec{L} = \Theta\vec{\omega} = \lambda\vec{\omega}$ eine Eigenwertgleichung mit dem Eigenwert λ . Bei dem Zylinder ist z. B. für $\vec{\omega} \parallel z$

$$\vec{L} = \Theta\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Theta^{zz}\omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung $\Theta\vec{\omega} = \lambda\omega$ hat eine nichttriviale Lösung, wenn

$$\begin{aligned}\det(\Theta - \lambda\mathbf{1})\vec{\omega} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \Theta_{xx} - \lambda & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} - \lambda & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} - \lambda \end{vmatrix} &= 0\end{aligned}$$

Die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, die als Lösungen dieses Polynoms dritten Grades auftreten, sind die Hauptträgheitsmomente, die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3$ sind die Hauptträgheitsachsen. Bei einer Drehung des Körpers um eine Hauptträgheitsachse ist der Drehimpuls \vec{L} parallel zu $\vec{\omega}$. Hauptträgheitsachsen fallen mit den Symmetrieachsen zusammen. Da der Trägheitstensor eine symmetrische Matrix ist, sind diese Eigenwerte immer reell.

Wir betrachten jetzt die kinetische Energie eines rotierenden Körpers.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\vec{r}) \dot{\vec{r}}^2 \\ &= \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\vec{r}) \dot{\vec{r}} (\vec{\omega} \times \vec{r}) \end{aligned}$$

Da man im Spatprodukt zyklisch vertauschen darf, ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int d^3r \varrho(\vec{r}) \vec{\omega} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \vec{L} \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \Theta \vec{\omega}. \end{aligned}$$

Wenn wir den Axialvektor $\vec{\omega}$ aufteilen in seinen Betrag $\omega = \sqrt{\vec{\omega}^2}$ und seine Richtung $\hat{n} = \vec{\omega}/\omega$, also

$$\vec{\omega} = \omega \hat{n},$$

kann man die kinetische Energie ausdrücken als

$$T = \frac{1}{2} \omega^2 \hat{n} \Theta \hat{n}$$

Dabei ist $\hat{n} \Theta \hat{n}$ das Trägheitsmoment um die Rotationsachse \hat{n} , das man ausdrücken kann durch

$$\hat{n} \Theta \hat{n} = \int d^3r \varrho(\vec{r}) (\vec{r}^2 - (\vec{r} \cdot \hat{n})^2).$$

Wir geben nun den Steinerschen Satz für den Trägheitstensor an (vgl. Abb. 5.5). Die Drehachsen \vec{z} sind mit den Drehachsen $\vec{\omega}$ verknüpft durch

$$\vec{z} = \vec{\omega} + \vec{a}.$$

Der Trägheitstensor im neuen System ist damit

$$\begin{aligned} \Theta_{ij} &= \int d^3z \varrho(\vec{z}) (\vec{z}^2 \delta_{ij} - z_i z_j) \\ &= \int d^3\omega \varrho(\vec{\omega}) ((\vec{\omega} + \vec{a}) (\vec{\omega} + \vec{a}) \delta_{ij} - (\vec{\omega} + \vec{a})_i (\vec{\omega} + \vec{a})_j) \\ &= \Theta_{ij}^{(S)} + \int d^3\omega \varrho(\vec{\omega}) (\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \\ \Theta_{ij} &= \Theta_{ij}^{(S)} + M (\vec{a}^2 \delta_{ij} - a_i a_j) \end{aligned}$$

Betrachten wir das Integral

$$\begin{aligned} \int d^3\omega \varrho(\vec{\omega}) \vec{a} \cdot \vec{\omega} &= \vec{a} \cdot \int d^3\omega \varrho(\vec{\omega}) \vec{\omega} = 0 \\ \hat{n} \Theta \hat{n} &= \hat{n} \Theta^{(S)} \hat{n} + M \underbrace{(\vec{a}^2 - (\vec{a} \hat{n})^2)}_{b^2} \end{aligned}$$

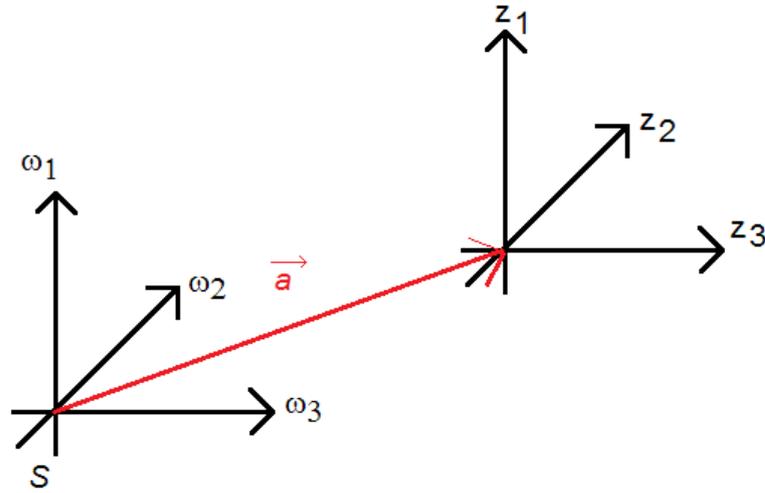


Abbildung 5.5: Zum Steinerschen Satz

Das Trägheitsmoment eines Körpers um eine Achse in Richtung \hat{n} ist gleich dem Trägheitsmoment des Körpers um eine dazu parallele Achse durch den Schwerpunkt $+Mb^2$, wobei b der senkrechte Abstand der beiden Achsen ist.

Wenn wir die Zeitableitung des Drehimpulses im raumfesten System $\vec{L}^{(R)} = \int d^3r \varrho(\vec{r})(\vec{r}^{(R)} \times \dot{\vec{r}}^{(R)})$ bilden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}^{(R)} &= \int d^3r \varrho(\vec{r})(\vec{r}^{(R)} \times \ddot{\vec{r}}^{(R)}) \\ &= N^{(R)}, \end{aligned}$$

wobei $N^{(R)}$ als Drehmoment im raumfesten System bezeichnet werden soll. Wenn wir dies für ein System von diskreten Massepunkten durchführen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{\ell} m_{\ell} \vec{r}^{(\ell)} \times \dot{\vec{r}}^{(\ell)}, \\ \frac{d}{dt} \vec{L} &= \sum_{\ell} m_{\ell} \vec{r}^{(\ell)} \times \ddot{\vec{r}}^{(\ell)} \\ &= \sum_{\ell} \vec{r}^{(\ell)} \times \vec{F}^{(\ell)} \\ &= \vec{N}. \end{aligned}$$

Die Zeitabhängigkeit des Gesamtdrehimpulses im raumfesten System ist also durch das gesamte äußere Drehmoment vollständig gegeben. Im Besonderen ist bei $N^{(R)} = 0$ der Drehimpuls erhalten. Wenn wir nun in das körperfeste System übergehen

$$\begin{aligned} \vec{L}^{(R)} &= R(t) \vec{L}^{(K)} \\ \vec{L}^{(K)} &= R^{\dagger}(t) \vec{L}^{(R)}, \end{aligned}$$

ist das nicht mehr der Fall

$$\begin{array}{ll} \text{raumfest} & \text{körperfest} \\ \vec{N}^{(R)} = 0 & \vec{N}^{(K)} = 0 \\ \vec{L}^{(R)} = \text{const} & \vec{L}^{(K)}(t) = R^\dagger(t)\vec{L}^{(R)}. \end{array}$$

Wegen der Zeitabhängigkeit von R ist der Drehimpuls im körperfesten System nicht konstant.

Wir stellen nun die Bewegungsgleichung für den Drehimpuls im körperfesten System auf (Eulersche Bewegungsgleichungen)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{L}^{(R)} &= \frac{d}{dt}(R(t)\vec{L}^{(K)}) \\ &= \frac{d}{dt}(R(t)\Theta^{(K)}\vec{\omega}^{(K)}) \\ \vec{N}^{(R)} &= \dot{R}(t)\Theta^{(K)}\vec{\omega}^{(K)} + R(t)\Theta^{(K)}\dot{\vec{\omega}}^{(K)} \\ \vec{N}^{(K)} &= R^\dagger\vec{N}^{(R)} \\ &= R^\dagger\dot{R}\Theta^{(K)}\vec{\omega}^{(K)} + \Theta^{(K)}\dot{\vec{\omega}}^{(K)} \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} (\dot{R}R^\dagger)_{ij} &= \sum_{\ell} \varepsilon_{ij\ell}\omega_{\ell}^{(R)} \\ (R^\dagger\dot{R})_{ij} &= \sum_{\ell} \varepsilon_{i\ell j}\omega_{\ell}^{(K)}. \end{aligned}$$

Wenn wir dies in den Ausdruck für $\vec{N}^{(K)}$ einsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned} N_i^{(K)} &= \sum_{j,m} (R^\dagger\dot{R})_{ij}\Theta_{jm}^{(K)}\omega_m^{(K)} + \sum_m \Theta_{im}^{(K)}\dot{\omega}_m^{(K)} \\ &= \sum_{j,\ell,m} \varepsilon_{i\ell j}\omega_{\ell}^{(K)}\Theta_{jm}^{(K)}\omega_m^{(K)} + \sum_m \Theta_{im}^{(K)}\dot{\omega}_m^{(K)} \\ \vec{N}^{(K)} &= \vec{\omega}^{(K)} \times (\Theta^{(K)}\vec{\omega}^{(K)}) + \Theta^{(K)}\dot{\vec{\omega}}^{(K)} \end{aligned}$$

Dies sind die Eulerschen Bewegungsgleichungen.

Wenn wir auf Hauptachsen transformieren, der Trägheitstensor also diagonal ist

$$\Theta^{(K)} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(K)} & & \\ & \theta_2^{(K)} & \\ & & \theta_3^{(K)} \end{pmatrix},$$

können wir das Kreuzprodukt wegen $\Theta^{(K)}\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \theta_1^{(K)}\omega_1^{(K)} \\ \theta_2^{(K)}\omega_2^{(K)} \\ \theta_3^{(K)}\omega_3^{(K)} \end{pmatrix}$ aufschreiben als

$$\vec{\omega}^{(K)} \times (\Theta^{(K)}\vec{\omega}^{(K)}) = \begin{pmatrix} \omega_2\theta_3\omega_3 - \omega_3\theta_2\omega_2 \\ \omega_3\theta_1\omega_1 - \omega_1\theta_3\omega_3 \\ \omega_1\theta_2\omega_2 - \omega_2\theta_1\omega_1 \end{pmatrix}$$

$$N_1^{(K)} = \theta_1^{(K)} \dot{\omega}_1^{(K)} + (\theta_3^{(K)} - \theta_2^{(K)}) \omega_3^{(K)} \omega_2^{(K)} \quad (5.3)$$

$$N_2^{(K)} = \theta_2^{(K)} \dot{\omega}_2^{(K)} + (\theta_1^{(K)} - \theta_3^{(K)}) \omega_1^{(K)} \omega_3^{(K)} \quad (5.4)$$

$$N_3^{(K)} = \theta_3^{(K)} \dot{\omega}_3^{(K)} + (\theta_2^{(K)} - \theta_1^{(K)}) \omega_1^{(K)} \omega_2^{(K)} \quad (5.5)$$

Die Eulerschen Bewegungsgleichung kann man nur in wenigen Fällen analytisch nicht lösen. Ein bekanntes Beispiel ist ein kräftefreier symmetrischer Kreisel ($\vec{N}^{(R)} = 0, \theta_1 = \theta_2 \neq \theta_3$; vgl. Abb. 5.2). Auf der Erde kann man sich einen kräftefreien Kreisel zunächst schwer vorstellen, da stets die Schwerkraft auf den Kreisel wirkt. Wenn man jedoch den Kreisel im Schwerpunkt unterstützen, verschwindet das äußere Drehmoment

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum_{\ell} \vec{r}_{\ell} \times \vec{F} = \sum_{\ell} \vec{r}_{\ell} \times m_{\ell} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\sum_{\ell} m_{\ell} \vec{r}_{\ell}}_{=0} \times \vec{F} = 0 \end{aligned}$$

Wenn wir in die Eulerschen Bewegungsgleichung einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} (5.5) \theta_1^{(K)} \dot{\omega}_1^{(K)} &= 0 \\ \Rightarrow \omega_3^{(K)} &= A = \text{const} \\ \theta_1^{(K)} \dot{\omega}_1^{(K)} + (\theta_3^{(K)} - \theta_1^{(K)}) \omega_2^{(K)} A &= 0 \\ \theta_1^{(K)} \dot{\omega}_2^{(K)} + (\theta_1^{(K)} - \theta_3^{(K)}) \omega_1^{(K)} A &= 0 \\ \dot{\omega}_1^{(K)} &= \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} A \omega_2^{(K)} \\ \dot{\omega}_2^{(K)} &= \underbrace{\frac{\theta_3 - \theta_1}{\theta_1} A}_{\alpha} \omega_1^{(K)} \\ \dot{\omega}_1^{(K)} &= -\alpha \omega_2^{(K)} \\ \dot{\omega}_2^{(K)} &= \alpha \omega_1^{(K)} \end{aligned}$$

Diese beiden Differentialgleichungen erster Ordnung können wir in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung überführen, die mathematisch einen harmonischen Oszillator beschreibt

$$\begin{aligned} \omega_2 &= -\frac{1}{\alpha} \dot{\omega}_1 \\ \ddot{\omega}_1^{(K)} &= -\alpha^2 \omega_1^{(K)} \\ \omega_1 &= B \sin \alpha t \\ -\omega_2 &= B \cos \alpha t \end{aligned}$$

Diese Schwingung, die ein Wandern der Drehachse auf einem Kegel um die z -Achse beschreibt, bezeichnet man als Präzessionsbewegung der Winkelgeschwindigkeit.

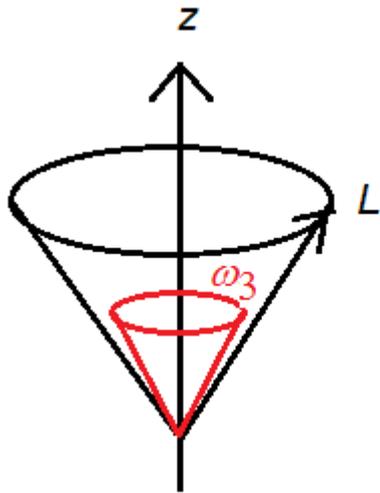


Abbildung 5.6: Präzession eines Kreisels

Ein Beispiel für einen solchen symmetrischen Kreisel. Durch die Abplattung der Erde aufgrund ihrer Rotation ist

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1 - \theta_3}{\theta_1} &= -\frac{1}{300} \\ \alpha &= \omega_z \frac{1}{300} \\ &= \frac{2\pi}{\text{Tag}} \frac{1}{300} \\ \Rightarrow T_{\text{Präzession}} &= 300 \text{ Tage.} \end{aligned}$$

Man beobachtet allerdings bei der Erde eine Periode der Präzession der Drehachse um den Nordpol von etwa 400 Tagen. Diese Abweichung liegt am inneren Aufbau der Erde, da der Kern nicht starr ist, sondern flüssig.

Kapitel 6

Hydrodynamik

6.1 Allgemeine Bemerkungen

Die Hydrodynamik studiert die Bewegung von Flüssigkeiten sowie in beschränktem Maße von Gasen. Wir betrachten im folgenden die Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ eines makroskopischen Volumenelementes dV . Die Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r})$ dieses Volumenelements hängt vom Ort ab (denken Sie an die Strömung in einem Fluss). Im Allgemeinen kann die Geschwindigkeit außerdem von der Zeit abhängen $\vec{v}(\vec{r}, t)$, wenn wir eine zeitliche Veränderung der Durchflußmenge zulassen. Wenn die Geschwindigkeitsverteilung zeitlich konstant ist ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$), bezeichnet man die Strömung als stationär.

Um eine Strömung vollständig zu beschreiben benötigt man

$\vec{v}(\vec{r}, t)$ die Geschwindigkeit an jedem Raumpunkt,
 $\rho(\vec{r}, t)$ Dichte und
 $p(\vec{r}, t)$ Druck.

Man kann eine Strömung durch Stromlinien darstellen, also an einzelne Raumpunkte angehängte Vektoren, die Richtung und Betrag der lokalen Geschwindigkeit angeben (vgl. Abb. 6.1). Anschaulich kann man sich vorstellen, dass man einzelne Teilchen in regelmäßigen Raumbständen des Mediums markiert und mit einer gewissen Belichtungszeit Δt aufnimmt. Auf der Aufnahme erscheinen dann Striche der Länge $\Delta s = v\Delta t$, deren Verbindung die Stromlinien ergibt. Die Geschwindigkeiten sind also die Tangenten an die Stromlinien.

Von den Stromlinien muss man die Trajektorien unterscheiden, also die Bahn von einzelnen Teilchen des Mediums. Für stationäre Strömungen fallen Stromlinien mit den Trajektorien zusammen.

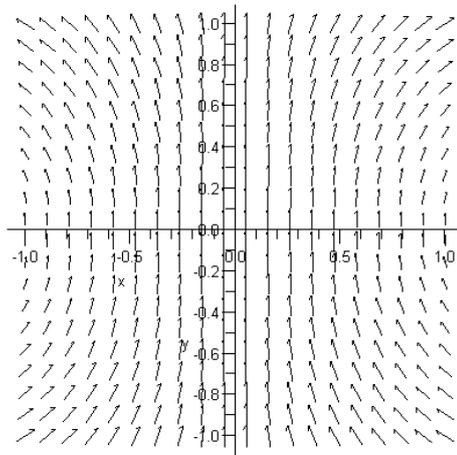
Zur Beschreibung von Strömungen definieren wir den Stromdichtevektor

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t)\vec{v}(\vec{r}, t).$$

Wenn wir die Einheit der Stromdichte betrachten

$$[|\vec{j}|] = \frac{\text{kg m}}{\text{m}^3 \text{s}} = \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}},$$

erkennen wir die anschauliche Bedeutung dieser Größe: $|\vec{j}|$ gibt die Flüssigkeitsmenge an, die pro Zeiteinheit durch eine zur Geschwindigkeit \vec{v} senkrecht stehende

Abbildung 6.1: Stromlinien¹

Fläche strömt. Wir beschreiben die Fläche durch ihren Normalenvektor \hat{n} . Wenn wir den Fluss durch eine zum Geschwindigkeitsvektor schräg stehende Fläche bestimmen wollen, verwenden wir das Skalarprodukt

$$\rho \vec{v} \hat{n} da,$$

um die Flüssigkeitsmenge, die pro Zeiteinheit durch das Oberflächenelement $\hat{n} da$ strömt, zu beschreiben. Hierbei ist da ein infinitesimales Flächenelement. Das Skalarprodukt kann positives oder negatives Vorzeichen haben. Wir legen fest, dass

$$\begin{cases} \rho \vec{v} \hat{n} da > 0, & \text{wenn Flüssigkeit aus dem Volumen herausströmt,} \\ \rho \vec{v} \hat{n} da < 0, & \text{wenn Flüssigkeit in das Volumen hineinströmt,} \end{cases}$$

das durch da berandet wird.

6.2 Kontinuitätsgleichung

Wir betrachten die zeitliche Änderung der Flüssigkeitsmenge in einem Volumen

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho(\vec{x}, t).$$

Wenn Flüssigkeit aus dem Volumen herausströmt, wird ρ kleiner, also hat die Zeitableitung negatives Vorzeichen. Da die Änderung der Dichte die herausströmende Flüssigkeit beschreibt, können wir schreiben

$$\frac{\partial}{\partial t} \int dV \rho = - \int \vec{j} d\vec{a},$$

¹Bildquelle: <http://www.jb-electronics.de/images/prog/maple/m-vektorfelder/fieldplot.gif>

wobei $d\vec{a} = \hat{n} da$. Wenn wir auf die rechte Seite den Gaußschen Satz anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int \varrho dV &= -\vec{j} d\vec{a} = - \int \varrho \vec{v} d\vec{a} \\ &= - \int \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) dV. \end{aligned}$$

Der Ausdruck

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0$$

wird als Kontinuitätsgleichung bezeichnet und kommt ähnlich in vielen Bereichen der Physik vor.

Wenn wir eine inkompressible Flüssigkeit betrachten ($\varrho = \text{const}$), gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varrho &= 0 \\ \Rightarrow \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) &= 0 \\ \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} &= 0. \end{aligned}$$

Die Divergenz der Stromdichte $\operatorname{div} \vec{j}$ bezeichnet man als Quellendichte. Diese Begriffsbildung tritt auch in der Elektrodynamik auf. Dort gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \varrho_q \end{aligned}$$

mit der Ladungsdichte ϱ_q .

6.3 Euler-Gleichung

Der Druck

$$p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

ist im allgemeinen ein Tensor 2. Stufe, da er von der Richtung zweier Vektoren abhängt, der Flächennormale und der Kraft. Er kann also als Matrix dargestellt werden. Für uns ist $p(\vec{x}, t)$ ein Skalar, da wir die Flüssigkeit als isotrop betrachten. Wenn wir eine Schichtung von Flüssigkeit betrachten, in der von unten nach oben der Druck abnimmt ($p_1 > p_2 > \dots > p_n$) (vgl. Abb. 6.2), wirkt die Kraft nach oben, d. h. der Druckgradient

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_2 - p_1}{\Delta x} = \frac{p(x + \Delta x) - p(x)}{\Delta x}.$$

zeigt offensichtlich nach unten. Die Gesamtkraft auf ein herausgegriffenes Flüssigkeitsvolumen ist

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \int p d\vec{a} \\ -\vec{F} &= \int p d\vec{a} = \int (\nabla p) dV = - \int \vec{f} dV, \end{aligned}$$

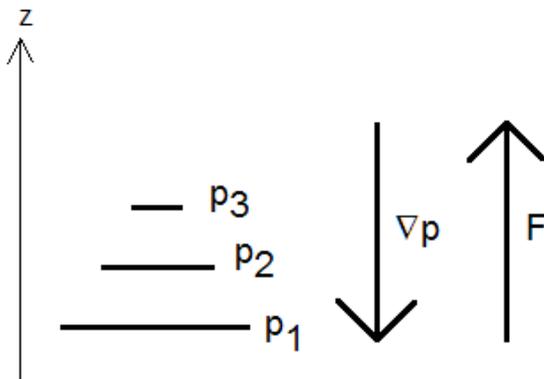


Abbildung 6.2: Druckgradient und Kraftvektor

wobei wir die Kraftdichte $\vec{f} = -\nabla p$ in Analogie zur Massendichte $M = \int \rho dV$ definiert haben. Das zweite Newtonsche Gesetz kann man dann schreiben als

$$\vec{f} = -\nabla p = \rho \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Dies ist die Euler-Gleichung. Wir müssen jedoch beachten, dass die Geschwindigkeit von Ort und Zeit abhängt. Darum schreiben wir die totale Ableitung $d\vec{v}/dt$ als Summe von partiellen Ableitungen

$$-\nabla p = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \dot{z} \right).$$

Wir vereinbaren nun die Abkürzungen

$$\begin{array}{lll} x \equiv x_1 & y \equiv x_2 & z \equiv x_3 \\ \text{sowie } \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} = \partial_2 & \frac{\partial}{\partial x_3} = \partial_3 \quad \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \end{array}$$

weil sich viele Formeln so übersichtlicher aufschreiben lassen. In diesem Fall erhalten wir die Euler-Gleichung in der Form

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \dot{x}_i \\ -\frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} v_i. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Oft schreibt man dafür abkürzend auch

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v}.$$

Die Euler-Gleichung ist die Bewegungsgleichung für eine Flüssigkeit.

Befindet sich die Flüssigkeit im Schwerfeld (Kraftdichte $\rho \vec{g}$), erhalten wir einen Zusatzterm

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \vec{v}) \cdot \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}.$$

Die Euler-Gleichung beschreibt eine ideale Flüssigkeit, in der keine Reibung und keine innere Zähigkeit auftritt. Wenn wir die Reibung berücksichtigen erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichung. Man kann einige Phänomene jedoch auch anhand der Euler-Gleichung studieren, wie die Bernoulli-Gleichung.

Für die Bernoullische Gleichung betrachten wir eine stationäre Strömung, so dass die Zeitableitung des Geschwindigkeitsfeldes verschwindet

$$\partial_t \vec{v} = 0$$

und wir können dann die Euler-Gleichung schreiben als

$$\sum_i (v_i \partial_i) v_j = -\frac{1}{\rho} \partial_j p.$$

Wir bilden nun das Skalarprodukt dieses Ausdrucks mit dem Vektor \vec{v}

$$\begin{aligned} \sum_j v_j \sum_i (v_i \partial_i) v_j &= \sum_j v_j \left(-\frac{1}{\rho} \partial_j p \right) \\ \sum_{i,j} v_i v_j \partial_i v_j &= -\sum_j \frac{v_j}{\rho} \partial_j p \\ \sum_i v_i \frac{1}{2} (\partial_i v^2) &= -\sum_i \frac{v_i}{\rho} \partial_i p \\ \sum_i v_i \underbrace{\partial_i \left(\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right)}_{a_i} &= 0 \\ \vec{v} \vec{a} &= 0. \end{aligned}$$

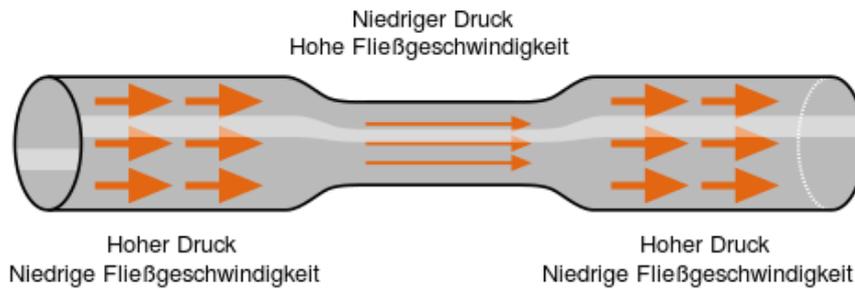
Das Skalarprodukt $\vec{a} \vec{v} = |\vec{a}| |\vec{v}| \cos \alpha$ kann man als Projektion von \vec{a} auf \vec{v} ansehen. \vec{v} folgt den Stromlinien, d. h. man findet in Richtung \vec{v} eine stationäre Strömung

$$p + \rho \frac{v^2}{2} = p_0 = \text{const.} \quad (6.2)$$

Den ersten Term bezeichnet man als statischen Druck, den zweiten als Staudruck. Da an einer Engstelle bei gleichem Fluss die Geschwindigkeit steigt, um den Flüssigkeitstransport zu gewährleisten, sinkt der statische Druck, weil die Summe aus statischem und Staudruck nach der Bernoulli-Gleichung konstant ist (vgl. Abb. 6.3).

6.4 Navier-Stokes-Gleichung

Wie ist die Euler-Gleichung zu modifizieren, wenn Reibung auftritt? Um diese Frage zu untersuchen, schreiben wir in einem ersten Schritt die Euler-Gleichung

Abbildung 6.3: Bernoulli-Effekt an einer Engstelle²

um:

$$\begin{aligned}\varrho \partial_t v_i &= -\varrho \sum_k (v_k \partial_k) v_i - \partial_i p \\ \partial_t(\varrho v_i) &= v_i \partial_t \varrho - \varrho \sum_k (v_k \partial_k) v_i - \partial_i p\end{aligned}$$

wobei der erste Term auf der rechten Seite mit der Kontinuitätsgleichung umgeformt wird

$$\begin{aligned}\partial_t(\varrho v_i) &= v_i (-\operatorname{div}(\vec{v}\varrho)) - \varrho \sum_k (v_k \partial_k) v_i - \partial_i p \\ \partial_t(\varrho v_i) &= v_i \left(-\sum_k \partial_k(\varrho v_k) \right) - \varrho \sum_k (v_k \partial_k) v_i - \partial_i p \\ \partial_t(\varrho v_i) &= -\sum_k v_i \partial_k(\varrho v_k) - \sum_k \varrho v_k \partial_k v_i - \partial_i p \\ \partial_t(\varrho v_i) &= -\sum_k \partial_k (v_i \varrho v_k) - \partial_i p;\end{aligned}$$

mit dem Kroneckerdelta können wir dies folgendermaßen schreiben

$$\begin{aligned}\partial_t(\varrho v_i) &= -\sum_k \partial_k \Pi_{ik} \\ \text{wobei } \Pi_{ik} &= v_i \varrho v_k + \delta_{ik} p\end{aligned}$$

die sog. Impulsstromdichte ist.

Wenn wir über die obige modifizierte Euler-Gleichung integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_t \int \underbrace{(\varrho v_i)}_{\text{Impulsdichte}} dV &= -\sum_k \int \partial_k \Pi_{ik} dV \\ &= -\sum_k \int \Pi_{ik} da_k,\end{aligned}$$

²Bildquelle: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/de/thumb/1/10/Schema_eines_Rohres_mit_Engstelle-Bernoulli.svg

wobei im letzten Schritt wieder den Satz von Gauß verwendet wurde. Der Impulsstrom durch ein Flächenelement $d\vec{a}$ ist die an diesem Element angreifende Kraft. Wie ist das Π_{ik} zu modifizieren, wenn Reibung auftritt?

Von dieser Form der Eulergleichung gehen wir aus, um Reibungsterme einzuführen, d. h. wir wollen in der Eulergleichung die Impulsstromdichte Π_{ik} durch ein σ_{ik} modifizieren, das die Reibungseffekte berücksichtigt.

$$\varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \varrho (\nabla \vec{v}) \vec{v} = -\nabla p$$

$$\partial_t (\varrho v_k) = \sum_k \partial_k \Pi_{ik} = \sum_k \partial_k (p \delta_{ik} + \varrho v_k v_i)$$

Wir machen folgende plausible Annahmen:

1. σ_{ik} hängt nicht von der Geschwindigkeit, sondern von den Ableitungen der Geschwindigkeit $\partial_k v_i$.
2. σ_{ik} ist linear in $\partial_k v_i$.
3. Es treten keine höheren Ableitungen auf.
4. Es gibt keine konstanten Terme, so dass für $v \rightarrow 0$ die Reibung verschwindet.
5. Keine Reibung bei Drehung der gesamten Flüssigkeit.

Dadurch ist die allgemeine Form von σ_{ik}

$$\sigma_{ik} = \alpha (\partial_k v_i) + \beta (\partial_i v_k) + \gamma \sum_{\ell} \partial_{\ell} v_{\ell} \delta_{ik}.$$

Wir betrachten die fünfte Bedingung genauer.

$$v_{\ell} = \sum_{m,j} \varepsilon_{\ell m j} x_m \omega_j$$

$$\sigma_{\ell k} = \alpha (\partial_k v_{\ell} - \partial_{\ell} v_k) + \beta (\partial_k v_{\ell} + \partial_{\ell} v_k)$$

$$\sigma_{\ell k} = \alpha \left\{ \sum_{m,j} \partial_k \varepsilon_{\ell m j} x_m \omega_j - \partial_{\ell} \varepsilon_{k m j} \omega_j \partial_{\ell} x_m \right\}$$

$$+ \beta \left\{ \sum_{m,j} \partial_k \varepsilon_{\ell m j} x_m \omega_j + \partial_{\ell} \varepsilon_{k m j} \omega_j \partial_{\ell} x_m \right\}$$

$$= \alpha \left\{ \sum_{m,j} \delta_{km} \varepsilon_{\ell m j} \omega_j - \varepsilon_{k m j} \omega_j \delta_{\ell m} \right\}$$

$$+ \beta \left\{ \sum_{m,j} \delta_{km} \varepsilon_{\ell m j} \omega_j + \varepsilon_{k m j} \omega_j \delta_{\ell m} \right\}$$

$$= \alpha \{ \varepsilon_{\ell k j} \omega_j - \varepsilon_{k \ell j} \omega_j \}$$

$$+ \beta \{ \varepsilon_{\ell k j} \omega_j + \underbrace{\varepsilon_{k \ell j}}_{=-\varepsilon_{\ell k j}} \omega_j \}$$

$$= 2\varepsilon_{\ell k j} \omega_j \alpha + 0.$$

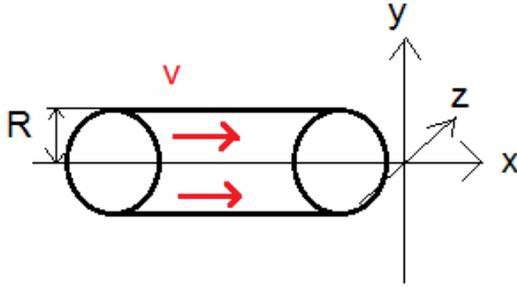


Abbildung 6.4: Flüssigkeitsdurchströmtes Rohr

Da bei einer Drehung keine Reibung auftreten soll, muss α verschwinden. Also liefert nur der Term $\partial_k v_\ell + \partial_\ell v_k$ einen sinnvollen Beitrag zu $\sigma_{\ell k}$ und wir erhalten die Form

$$\sigma_{\ell k} = \eta(\partial_\ell v_k + \partial_k v_\ell).$$

Wenn wir den letzten Term aufspalten, können wir schreiben

$$\sigma_{ik} = \eta \left(\partial_k v_i + \partial_i v_k - \frac{2}{3} \delta_{ik} \sum_\ell \partial_\ell v_\ell \right) + \xi \sum_\ell \partial_\ell v_\ell \delta_{ik}.$$

Hierbei ist η die Viskosität und ξ die Zweite Zähigkeit.

Die Bewegungsgleichung, die sich damit ergibt, ist die Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t(\rho v_i) = - \sum_k \partial_k (\Pi_{ik} - \sigma_{ik}).$$

Im Fall einer inkompressiblen Flüssigkeit ist

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \sigma_{ik} = \eta(\partial_k v_i + \partial_i v_k)$$

Wenn wir darauf die Ableitung anwenden, erhalten wir

$$\partial_k \sigma_{ik} = \eta \Delta v_i$$

mit dem Laplace-Operator $\Delta = \sum_i \partial_i^2$. Damit erhalten wir die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v}. \quad (6.3)$$

Beispiel

Wir betrachten ein Rohr mit Durchmesser R , das in x -Richtung ausgerichtet sei und von Flüssigkeit durchströmt wird (vgl. Abb. 6.4). Zunächst suchen wir nur

stationäre Lösungen, also

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Außerdem ist

$$v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Aufgrund der Symmetrie der Anordnung ist das eine vernünftige Annahme.

$$(\partial_x \vec{v}, \partial_y \vec{v}, \partial_z \vec{v}) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial_x p \\ \partial_y p \\ \partial_z p \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \Delta v_x \\ \Delta v_y \\ \Delta v_z \end{pmatrix}$$

Wegen $v_y = 0, v_z = 0$ sieht man sofort, dass

$$\begin{aligned} \partial_y p &= 0, \\ \partial_z p &= 0. \end{aligned}$$

Es verbleibt also

$$v_x \partial_x v_x = -\partial_x p + \eta(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2)v_x.$$

Aus der Inkompressibilität der Flüssigkeit folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z &= 0 \\ \Rightarrow \partial_x v_x &= 0. \end{aligned}$$

v_x kann also nur von y und z abhängen. Wir machen daher die Umdefinition

$$v_x(y, z) \equiv v(y, z).$$

Somit vereinfacht sich die Navier-Stokes-Gleichung für diesen Fall zu

$$\partial_x p(x) = \eta(\partial_y^2 + \partial_z^2)v(y, z).$$

Da die linke Seite nur von x abhängt und die rechte nur von y, z abhängt, müssen die Funktionen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens konstant sein, damit sie für alle x, y, z gelten. Wir bezeichnen die Konstante mit α und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_x p &= \alpha \\ \eta(\partial_y^2 + \partial_z^2)v &= \alpha. \end{aligned}$$

Die erste Differentialgleichung hat die Lösung

$$p(x) = \alpha x + p_0.$$

Die zweite Differentialgleichung

$$(\partial_y^2 + \partial_z^2)v = \frac{\alpha}{\eta}$$

können wir vereinfachen, indem wir die Symmetrie des Problems ausnutzen. Das Rohr ist invariant bei Drehungen um die x -Achse, der Teil des Laplace-Operators für y, z entspricht also dem r -Anteil des Laplace-Operators in Zylinderkoordinaten.

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) &= \frac{\alpha}{\eta} \\ d \left(r \frac{dv}{dr} \right) &= \frac{\alpha}{\eta} r \, dr \\ r \frac{dv}{dr} &= \frac{\alpha}{\eta} \frac{r^2}{2} + a \\ \frac{dv}{dr} &= \frac{\alpha}{\eta} \frac{r}{2} + \frac{a}{r} \\ v &= \frac{\alpha}{\eta} \frac{r^2}{4} + a \ln r + b.\end{aligned}$$

Eine sinnvolle Randbedingung ist $v(R) = 0$. Damit die Lösung physikalisch sinnvoll ist, müssen wir zudem fordern, dass die Lösung bei $r = 0$ keine Singularität hat. Aus dieser zweiten Bedingung folgt direkt $a = 0$. Wenn wir die erste Bedingung einsetzen, erhalten wir

$$-b = \frac{\alpha}{\eta} \frac{R^2}{4}.$$

Damit erhalten wir das Geschwindigkeitsprofil

$$v = \frac{\alpha}{4\eta} (r^2 - R^2).$$

Die Separationskonstante α hat auch physikalische Bedeutung. Da die Ableitung des Druckes

$$\partial_x p_x = \alpha$$

konstant ist, können wir sie durch den endlichen Druckunterschied Δp über die Länge ℓ des Rohres ausdrücken

$$\alpha = \frac{\Delta p}{\ell}.$$

Dann können wir die Geschwindigkeitsverteilung schreiben als

$$v = \frac{|\Delta p|}{4\eta\ell} (R^2 - r^2).$$

Hierbei haben wir berücksichtigt, dass der Druckgradient antiparallel zur Fließgeschwindigkeit ist.

Wir bestimmen nun die Durchflussmenge. Wir betrachten dazu einen infini-

tesimalen Ring mit der Fläche $2\pi r dr$. Der Fluss durch diesen Ring ist

$$\begin{aligned}
 2\pi r v(r) dt dr &= 2\pi r \frac{|\Delta p|}{4\ell\eta} (R^2 - r^2) dt dr \\
 \frac{\text{Durchfluss}}{t} &= \int_0^R \frac{2\pi |\Delta p|}{4\ell\eta} (R^2 r - r^3) dr \\
 &= \frac{2\pi |\Delta p|}{4\ell\eta} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R \\
 &= \frac{\pi |\Delta p| R^4}{\ell\eta} \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Damit haben wir das Hagen-Poiseuillesche Gesetz hergeleitet.

Wir betrachten nun die Einheit der Viskosität η .

$$\begin{aligned}
 \left[\varrho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] &= \frac{\text{kg}}{\text{m}^2 \text{s}^2} \\
 &= [\eta \Delta v] = [\eta] \frac{1}{\text{m}^2} \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

Die Einheit von η ist also kg/m s. Man kann die Viskosität auch ausdrücken in

$$\begin{aligned}
 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}} &= 0,1 \text{ Poise} \\
 &= 1 \text{ Pa s}, \\
 \text{wobei } 1 \text{ Poise} &= 1 \frac{\text{g}}{\text{cm s}}, \\
 1 \text{ Pa} &= 1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\
 &= 1 \frac{\text{kg}}{\text{m s}^2}, \\
 1 \text{ Pa} &= 10^{-5} \text{ bar}.
 \end{aligned}$$

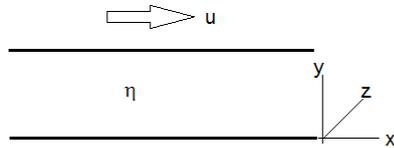
Wir geben einige Zahlenbeispiele für die Viskosität.

	$\eta / \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$
Wasser bei 20°C	0,001 005
Luft	$1,8 \cdot 10^{-5}$
Glyzerin	0,85
Quecksilber	0,00156

Die Viskosität nimmt bei Flüssigkeiten mit steigender Temperatur ab. Bei Wasser gilt

Temperatur [°C]	$\eta / \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$
0	0,001 789
20	0,001 005
100	0,000 282

Als weiteres Beispiel betrachten wir nun zwei gegeneinander bewegte Platten (vgl. Abb. 6.5). Wir betrachten stationäre Lösungen $\partial \vec{v} / \partial t = 0$. Aus Symme-

Abbildung 6.5: In x -Richtung gegeneinander bewegte Platten

triegründen gilt

$$\begin{aligned}v_x &\neq 0, \\v_y &= 0, \\v_z &= 0.\end{aligned}$$

Wenn sich die bewegte Platte mit u gegenüber der ruhenden Platte bewegt, erhalten wir die Randbedingungen

$$\begin{aligned}v_x(y=0) &= 0, \\v_x(y=h) &= u.\end{aligned}$$

Da wir nur eine von Null verschiedene Geschwindigkeit betrachten, lassen wir den Index weg ($v_x \equiv v$). Die Navier-Stokes-Gleichung vereinfacht sich zu

$$\nu \partial_x v = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Wegen der Inkompressibilität gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow \partial_x v_x + \partial_y v_y + \partial_z v_z &= 0\end{aligned}$$

so dass übrigbleibt

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Als Lösung dieser Gleichung ergibt sich ein lineares Geschwindigkeitsprofil

$$v = \frac{u}{h} y.$$

Der Tensor σ_{ik} vereinfacht sich in diesem Fall zu

$$\sigma_{ik} = \eta \begin{pmatrix} 0 & \frac{u}{h} & 0 \\ \frac{u}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

da nur $\partial_y v_x \neq 0$ ist.

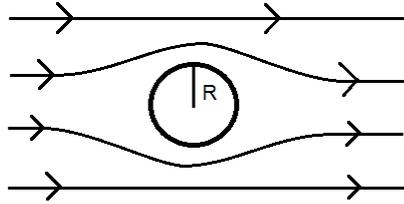


Abbildung 6.6: Zur Herleitung der Reynolds-Zahl

Die Kraft erhalten wir dann aus

$$F_i = \sigma_{ik} d_{fk}$$

$$\vec{F} = \eta \frac{u}{h} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\vec{F}}{A} = \eta \frac{u}{h}.$$

Hierbei ist A die Fläche der Platte. Über diesen Zusammenhang wird in der Experimentalphysik oft die Viskosität definiert. Zwei Platten werden gegeneinander bewegt: man findet $F \sim A$, $F \sim u$, $F \sim 1/\text{Abstand} = 1/h$.

$$F \sim \frac{Au}{h}$$

$$F = \eta \frac{Au}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{F}{A} = \eta \frac{u}{h}.$$

Literatur: Landau-Lifschitz, Bd. 6.

6.5 Reynolds-Zahlen

Die Reynolds-Zahlen stellen eine Möglichkeit zur Vereinfachung von hydrodynamischen Problemen dar, weil sich Probleme mit gleichen Reynolds-Zahlen gleich verhalten. Ein Problem ist definiert durch η , ρ , u und die räumliche Ausdehnung R . Die Reynolds-Zahl hängt von diesen Größen ab; wenn man die räumliche Ausdehnung ändert, kann man durch beispielsweise eine Änderung der Dichte zur selben Reynolds-Zahl kommen, so dass man das gleiche Strömungsbild erhält, was in Windkanälen ausgenutzt wird.

Um dies im Detail zu sehen und den Druck zu eliminieren, müssen wir die Navier-Stokes-Gleichung umschreiben

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\nabla p + \eta\Delta\vec{v},$$

Da der Druck nur über seinen Gradienten eingeht, nehmen wir die Rotation der

Navier-Stokes-Gleichung, weil $\nabla \times \nabla f = 0$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\nabla \times \vec{v})}_{\vec{\Omega} \text{ Vortizität}} + \rho \nabla \times (\nabla \vec{v}) \vec{v} &= \eta \nabla \times \Delta \vec{v} \\ \rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} + \rho \nabla \times (\vec{v} \nabla) \vec{v} &= \eta \Delta \vec{\Omega}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Wenn wir den Satz von Stokes auf das Geschwindigkeitsfeld anwenden, erhalten wir

$$\oint \vec{v} \, d\vec{s} = \int \underbrace{(\nabla \times \vec{v})}_{\vec{\Omega}} \, d\vec{a}$$

Die hiermit definierte Vortizität $\Omega = \nabla \times \omega$ kann also als Wirbelstärke interpretiert werden.

Wir verwenden für den zweiten Term auf der linken Seite von (6.4) die Hilfsformel

$$(\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))_j = \frac{1}{2} \partial_j \vec{v}^2 - (\vec{v} \nabla) v_j.$$

Damit wird

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} - \rho \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) = \eta \Delta \vec{\Omega}.$$

Um die Hilfsformel zu beweisen, verwendet man den Levi-Civita-Tensor

$$\begin{aligned} (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))_j &= \sum_{\ell, m} \varepsilon_{j\ell m} v_\ell (\nabla \times \vec{v})_m \\ &= \sum_{\ell, m, k, i} \varepsilon_{j\ell m} v_\ell \varepsilon_{kim} \partial_k v_i \\ &= \sum_{\ell, k, i} (\delta_{jk} \delta_{\ell i} - \delta_{ji} \delta_{\ell k}) v_\ell \partial_k v_i \\ &= \sum_{\ell} (v_\ell \partial_j v_\ell - v_\ell \partial_\ell v_j) \\ &= \frac{1}{2} \partial_j \vec{v}^2 - (\vec{v} \nabla) v_j. \end{aligned}$$

Was zu beweisen war.

Es verbleibt die Gleichung

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{\Omega}.$$

Als nächstes geben wir alle Längen in Einheiten von R an, machen also x ein-

heitenlos.

$$\begin{aligned} x &= x'D & x' &= \frac{x}{D} \\ y &= y'D & y' &= \frac{y}{D} \\ z &= z'D & z' &= \frac{z}{D} \\ D &= 2R \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= \frac{D^2}{4} \\ x'^2 + y'^2 &= \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{D^2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dasselbe Vorgehen wenden wir jetzt auf die Geschwindigkeit v an, die wir in Einheiten der Geschwindigkeit u der Flüssigkeit weit draußen angeben.

$$\begin{aligned} v &= v'u \\ v' &= \frac{v}{u} \\ t' &= \frac{x'}{v'} = \frac{x}{D} \frac{u}{v} = t \frac{u}{D}, \\ \text{denn } t &= \frac{x}{v}. \end{aligned}$$

Aus den Umdefinitionen

$$\begin{aligned} x &= Dx' \\ v &= uv' \end{aligned}$$

erhalten wir somit

$$\begin{aligned} t &= \frac{D}{u} t' \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{u}{D} \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{1}{D} \nabla' \\ \Delta &= \frac{1}{D^2} \Delta' \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v} = \frac{1}{D} u \nabla' \times \vec{v}' = \frac{u}{D} \vec{\Omega}'.$$

Damit können wir die Navier-Stokes-Gleichung dimensionslos aufschreiben.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\Omega} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\Omega}) &= \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{\Omega} \\ \frac{u^2}{D^2} \frac{\partial}{\partial t'} \vec{\Omega}' - \frac{u^2}{D^2} \nabla' \times (\vec{v}' \times \vec{\Omega}') &= \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{D^2} \frac{u}{D} \Delta \Omega' \\ \frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'} - \nabla' \times (\vec{v}' \times \vec{\Omega}') &= \frac{\eta}{Du\rho} \Delta' \vec{\Omega}'. \end{aligned}$$

Wir definieren nun die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{Du\rho}{\eta}$$

Wenn wir die Lösung von

$$\frac{\partial \vec{\Omega}'}{\partial t'} - \nabla' \times (\vec{v}' \times \vec{\Omega}') = \frac{1}{Re} \Delta \vec{\Omega}' \quad (6.5)$$

für einen Satz D, η, u und ρ gefunden haben, so kennen wir die Lösung für alle $\tilde{D}, \tilde{\eta}, \tilde{u}, \tilde{\rho}$, für die

$$Re = \frac{Du\rho}{\eta} = \frac{\tilde{D}\tilde{u}\tilde{\rho}}{\tilde{\eta}}$$

gilt, d. h. sofern die beiden Systeme die gleiche Reynoldszahl haben.

Bemerkungen

1. Diese Analyse gilt für $u \ll$ Schallgeschwindigkeit.
2. D ist eine lineare Dimension des Körpers, d. h. wir betrachten geometrisch ähnliche Objekte.

Wenn man die Reynolds-Zahl verwendet, um beispielsweise das Strömungsverhalten eines Schiffes zu untersuchen und dazu ein Modell im Maßstab 1:10 verwenden möchte, gilt

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{D_1}{10} \\ u_2 &= \frac{u_1}{10} \\ \frac{\rho_1}{\eta_1} D_1 &= \frac{\rho_2}{\eta_2} D_2 \\ \frac{\rho_2}{\eta_2} &= 10 \frac{\rho_1}{\eta_1} \end{aligned}$$

Die Größe ρ/η , die man auch spezifische Viskosität oder kinematische Zähigkeit nennt, muß also um einen Faktor 10 größer sein. Je größer η ist, desto kleiner ist die Reynolds-Zahl.

Die Reynolds-Zahl charakterisiert die Strömung. Wir führen eine Abschätzung der Größenordnung der Terme in durch:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\left(\frac{\eta}{\rho} \Delta v\right) &= \frac{\eta}{\rho} \frac{u}{D^2} = \frac{u^2}{D Re} \\ \mathcal{O}((\vec{v} \nabla) \vec{v}) &\sim \frac{u^2}{D} = \frac{1}{Re} \mathcal{O}\left(\frac{\eta}{\rho} \Delta v\right) \\ \mathcal{O}\left(\frac{\eta}{\rho} \Delta v\right) &= \mathcal{O}((\vec{v} \nabla) \vec{v}) \end{aligned}$$

Für kleine Re ist also der Term auf der linken Seite dominant und es bleibt nur die Gleichung

$$\Delta \vec{\Omega} = 0$$

zu lösen.

Bei der ähnlichen Konfiguration, bei der anstelle eines Zylinder eine Kugel mit Radius R umströmt wird, erhält man das aus der Experimentalphysik bekannte Ergebnis, dass die Kraft, um eine kleine Kugel mit Geschwindigkeit v durch eine Flüssigkeit mit Viskosität η zu ziehen, durch

$$F \sim 6\pi\eta Rv$$

gegeben ist, durch die Lösung von $\Delta\vec{\Omega} = 0$. Dieses Ergebnis ist als Stoke'scher Satz bekannt.

Rechnungen bei komplizierteren Geometrien und nichtstationäre Strömungen erfordern den Einsatz numerischer Rechnungen.

Teil II

Elektrodynamik

Kapitel 1

Elektrostatik

1.1 Grundlegende Prinzipien

Ladungserhaltung Die gesamte elektrische Ladung $Q_{\text{ges}} = \sum q_i$ in einem abgeschlossenen System ist zeitlich konstant.

Ladungsquantisierung Ladungen treten nur als Vielfache der sog. Elementarladung auf. Dies kann durch den Millikanversuch gezeigt werden.

Coulombsches Gesetz Die Kraft zwischen zwei ruhenden Ladungen q_1, q_2 an den Orten \vec{r}_1, \vec{r}_2 ist gegeben durch

$$\vec{F}_{1 \leftarrow 2} = K q_1 q_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}.$$

Diese Kraft erfüllt offensichtlich das 3. Newtonsche Axiom.

Superpositionsprinzip Die Kraft, mit der zwei Ladungen wechselwirken, werden durch die Anwesenheit einer dritten Ladung nicht geändert, es gibt also nur Zweikörperkräfte.

$$\vec{F}_i = K \sum_{i \neq j, j=1}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Die Konstante K hat dabei je nach Einheitensystem verschiedene Werte. In SI-Einheiten (MKSA-System nach den Grundeinheiten Meter, Kilogramm, Sekunde und Ampere) ist

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$
$$\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}.$$

In CGS-Einheiten (Centimeter, Gramm, Sekunde) ist $K = 1$, also

$$\vec{F} = q_1 q_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Die Ladung hat dann keine eigene Einheit wie im SI-System, sondern erhält ihre Ladung aus dem Coulombgesetz über

$$[q] = [\sqrt{Fr^2}] = \left[\sqrt{\frac{\text{g cm}}{\text{s}^2}} \text{cm}^2 \right]$$

$$[q] = \frac{\text{g}^{1/2} \text{cm}^{3/2}}{\text{s}} = 1 \text{ esu}$$

1.2 Elektrisches Feld

Die Auswirkungen einer Ladungsverteilung kann man durch ein elektrisches Feld \vec{E} beschreiben.

$$\vec{F} = \vec{E}(\vec{r})q$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Das elektrische Feld ist die Kraft pro Einheitsladung. Oft ist es angebracht Ladungen durch eine kontinuierliche Ladungsdichte $\varrho(\vec{r})$ zu beschreiben. Dann ist

$$Q = \int_{V_0} \varrho(\vec{r}) dV \quad (1.1)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_{V_0} \varrho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \quad (1.2)$$

Diese Beschreibung ist allgemeiner, denn man kann auch Punktladungen durch eine Ladungsdichte beschreiben. Das mathematische Werkzeug dazu ist die Dirac'sche Delta-Distribution

$$\delta(x - x_0) = 0 \text{ für alle } x \neq x_0.$$

Am Punkt x_0 hat $\delta(x - x_0)$ eine Singularität, so dass

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0 & x_0 \notin [a, b] \\ 1 & x_0 \in [a, b] \end{cases}$$

Die δ -Funktion wurde 1958 von Paul A. M. Dirac eingeführt und 1966 von Schwarz im Rahmen der Distributionentheorie mathematisch rigoros behandelt.

Man kann die Delta-Distribution auch über die Anwendung auf eine Funktion $f(x)$ definieren, wie es in der Distributionentheorie gemacht wird. Für $a < x_0 < b$ ist

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \int_a^b f(x_0) \delta(x - x_0) dx$$

$$= f(x_0) \int_a^b \delta(x - x_0) dx = f(x_0).$$

Die Verwendung der Delta-Distribution macht häufig eine Integration »trivial«. Beispielsweise ist

$$\int_3^5 e^{x^2} \delta(x-4) dx = e^{4^2} \int_3^5 \delta(x-4) dx = e^{16}.$$

Wir wenden nun die Delta-Distribution an, um die Ladungsdichte einer Punktladung zu definieren. Für eine Punktladung q am Ort $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ist die Ladungsdichte

$$\begin{aligned} \varrho(\vec{r}) &= q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0) \\ &=: q\delta^{(3)}(\vec{r}-\vec{r}_0). \end{aligned}$$

Um das zu zeigen, wenden wir nun auf diese Ladungsdichte die Formel für das elektrische Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung an.

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \int q\delta(\vec{r}'-\vec{r}_0) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r' \\ &= \int q\delta(x'-x_0)\delta(y'-y_0)\delta(z'-z_0) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dx' dy' dz' \\ &= q \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{|\vec{r}-\vec{r}_0|^3}. \end{aligned}$$

Wie erwartet, erhalten wir das Ergebnis, das wir zuvor für die Punktladung angegeben hatten.

1.3 Das Gaußsche Gesetz

Das obige Integral ist für kontinuierliche Ladungsverteilungen oft nur schwer zu lösen. Eine bessere Möglichkeit liefert das Gaußsche Gesetz, das eine Differentialgleichung für $\vec{E}(\vec{r})$ ergibt. Um das Gaußsche Gesetz herzuleiten, betrachten wir zuerst eine Punktladung im Zentrum einer Kugel.

Der Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung durch die Oberfläche einer Kugel um diese Punktladung (vgl. Abb. 1.1) ist

$$\oint \vec{E} d\vec{a} = \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Für eine allgemeine Oberfläche sind \vec{E} und $d\vec{a}$ nicht unbedingt parallel. Der Normalenvektor des Flächenelements $d\vec{a}' = \hat{n} da'$ steht im allgemeinen in einem Winkel α zum \vec{E} -Feld. Damit ist

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} d\vec{a} &= \oint \vec{E} \hat{n} da' \\ &= \oint E \cos \alpha da' \end{aligned}$$

Der Zusammenhang eines Flächenelementes einer Kugel und einer beliebigen Oberfläche ist

$$\frac{da}{da'} = \cos \alpha.$$

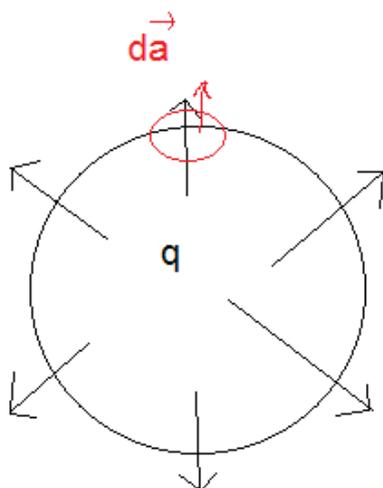


Abbildung 1.1: Fluss des elektrischen Feldes einer Punktladung durch die Oberfläche einer Kugel

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \, d\vec{a} &= \frac{q}{r^2} \cos \alpha \frac{da}{\cos \alpha} \\ &= 4\pi q, \end{aligned}$$

also das gleiche Ergebnis wie im 1. Fall. Für mehrere Ladungen q_i erhält man

$$\oint \vec{E} \, d\vec{a} = 4\pi \sum_i q_i$$

und verallgemeinert auf eine kontinuierliche Ladungsverteilung ist die Integralform des Gaußschen Gesetzes

$$\oint \vec{E} \, d\vec{a} = 4\pi \int \varrho(\vec{r}) \, d^3r. \quad (1.3)$$

Das ist die allgemeine Form des Gaußschen Gesetzes.

Wir können diesen Ausdruck auch schreiben als

$$\oint \vec{E} \, d\vec{a} = \int (\operatorname{div} \vec{E}) \, d^3r = 4\pi \int \varrho(\vec{r}) \, d^3r$$

und erhalten damit die Differentialform des Gaußschen Gesetzes

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \varrho. \quad (1.4)$$

Dies ist die 1. Maxwellgleichung. Im Gaußschen Gesetz steckt das Superpositionsprinzip und das Coulombsche Gesetz.

Beispiel: Feld einer geladenen Kugel

Wir verwenden nun das Gaußsche Gesetz zur Berechnung des Feldes einer geladenen Kugel mit Radius R im Koordinatenursprung und Ladungsverteilung

$$\varrho(\vec{r}) = \begin{cases} \varrho = \text{const} & r \leq R \\ 0 & r > R \end{cases}.$$

Für das Feld an einem Punkt \vec{r} außerhalb der Kugel gilt

$$\int \vec{E} \, d\vec{a} = 4\pi \underbrace{\int \varrho \, d^3r}_Q.$$

Da die Ladungsverteilung kugelsymmetrisch ist und das Feld somit radialsymmetrisch ist, sind \vec{E} und $d\vec{a}$ parallel und wir erhalten

$$\begin{aligned} |\vec{E}| 4\pi r^2 &= 4\pi Q \\ \Rightarrow |\vec{E}| &= \frac{Q}{r^2} \\ \vec{E} &= \frac{Q}{r^2} \hat{r} \\ \hat{r} &= \frac{\vec{r}}{r} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{Q}{r^3} \vec{r}. \end{aligned}$$

Wir können also von außen nicht unterscheiden, ob eine Ladung eine Punktladung oder eine massive homogen geladene Kugel ist.

Wir rechnen nun das Feld im Innern der homogen geladenen Kugel aus ($r < R$).

$$\begin{aligned} \int \vec{E} \, d\vec{a} &= 4\pi \int \varrho \, dV \\ |\vec{E}| 4\pi r^2 &= 4\pi \frac{4\pi}{3} \varrho r^3 \\ |\vec{E}| &= \frac{4\pi}{3} \varrho r \\ \vec{E} &= \frac{4\pi}{3} \varrho \vec{r}. \end{aligned}$$

Im speziellen verschwindet das Feld im Innern einer Hohlkugel. Der Feldverlauf ist in Abb. 1.2 gegeben.

Beispiel: Feld eines unendlich langen Drahtes

Für einen Draht mit einer Linienladungsdichte λ ($Q = \int \lambda \, dl$) betrachten wir das Gaußsche Gesetz für ein zylindrisches Volumen mit Länge ℓ und Radius r um den Draht. Der Fluß durch die Deckelflächen des Zylinders muss aus

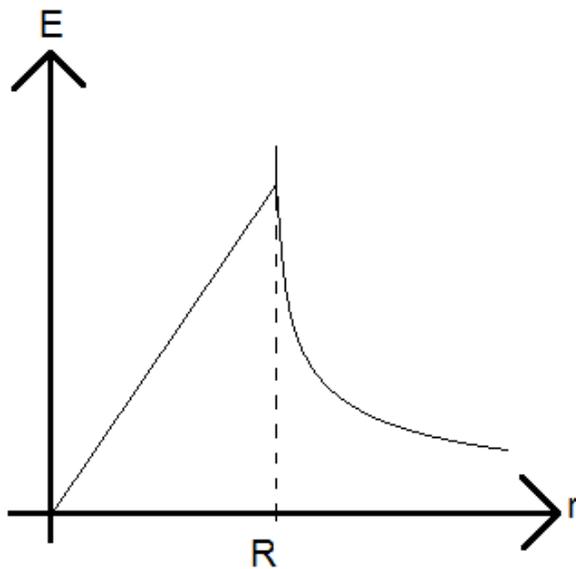


Abbildung 1.2: Feldverlauf einer homogenen massiven Kugel

Symmetriegründen verschwinden. Damit erhalten wir

$$\oint \vec{E} \, d\vec{a} = |\vec{E}| 2\pi r \ell = 4\pi \int \lambda \, d\ell = 4\pi \lambda \ell$$

$$|\vec{E}| = \frac{2\lambda}{r}$$

$$\vec{E} = \frac{2\lambda}{r} \hat{r}.$$

1.4 Das elektrostatische Potential

Wir hatten in der Mechanik gesehen, dass für ein konservatives Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ein Potential $\varphi(\vec{r})$ existiert

$$\oint \vec{F} \, d\vec{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} = -\nabla \varphi$$

$$\Leftrightarrow \nabla \times \vec{F} = 0.$$

In der Elektrostatik ist das Kraftgesetz

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\vec{E} = \int \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, d^3 r'.$$

Wir verwenden

$$-\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

und erhalten

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.5)$$

$$= -\nabla \varphi(\vec{r}). \quad (1.6)$$

Da ein Potential existiert, muss das elektrische Feld wirbelfrei sein.

$$\oint \vec{E} d\vec{s} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Damit haben wir die 2. Maxwell-Gleichung der Elektrostatik gefunden.

Die erste Maxwellgleichung ergibt für das Potential φ

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta \varphi = 4\pi \varrho,$$

also

$$\Delta \varphi = -4\pi \varrho. \quad (1.7)$$

Man nennt diese Gleichung Poissongleichung. Die Lösung der Poissongleichung ist

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'.$$

1.5 Die Multipolentwicklung

Das Problem der Elektrostatik ist gelöst, wenn das Potential

$$\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (1.8)$$

bekannt ist. Je nach der Gestalt der Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ kann dieses Integral sehr schwierig zu berechnen sein. Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung des Potentials ist die Multipolentwicklung. Dabei handelt es sich um eine Näherungsmethode, die wir anwenden können, wenn die Ausdehnung der Ladungsverteilung sehr viel kleiner ist als der Abstand zum Beobachter

$$|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|.$$

Dann können wir $1/(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ um $1/|\vec{r}|$ entwickeln.

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{|\vec{r}|} + \sum_i \partial_i \left. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} (-r'_i)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j \left. \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right|_{\vec{r}'=0} (r'_i r'_j) + \dots$$

Wir verwenden dazu die Hilfsformel

$$\partial_i \frac{1}{r^n} = \frac{-nr_i}{r^{n+2}},$$

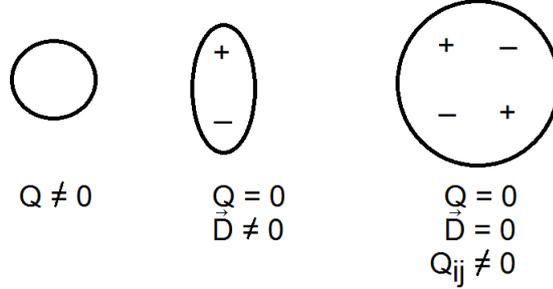


Abbildung 1.3: Zur Multipolentwicklung

die wir in der Mechanik hergeleitet hatten. Wir erhalten dann für die erste und zweite Ableitung

$$\begin{aligned} \partial_i \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} &= - \frac{r_i - r'_i}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{\vec{r}'=0} = - \frac{\vec{r}}{r^3} \\ \partial_i \partial_j \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Big|_{\vec{r}'=0} &= \partial_j \frac{-(\vec{r}_i - r'_i)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Big|_{\vec{r}'=0} \\ &= \left(\frac{-\delta_{ij}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} + \frac{3(r_i - r'_i)(r_j - r'_j)}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} \right) \Big|_{\vec{r}'=0} \\ &= \frac{-\delta_{ij}}{r^3} + 3 \frac{r_i r_j}{r^5}. \end{aligned}$$

Damit ist die Taylorreihe bis zur zweiten Ordnung

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}\vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \left(-\frac{(\vec{r}')^2}{r^3} + 3 \frac{(\vec{r}'\vec{r})(\vec{r}'\vec{r})}{r^5} \right) + \dots$$

Wir setzen nun diese Entwicklung in das Integral (1.8) ein und erhalten

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \int \frac{\varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{1}{r} \underbrace{\int \varrho(\vec{r}') d^3 r'}_{\text{Gesamtladung } Q} + \frac{\vec{r}}{r^3} \underbrace{\int \varrho(\vec{r}') \vec{r}' d^3 r'}_{\text{Dipolmoment } \vec{D}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{r_i r_j}{r^5} \underbrace{\int \varrho(\vec{r}') \{ -(\vec{r}')^2 \delta_{ij} + 3r'_i r'_j \} d^3 r'}_{\text{Quadrupolmoment}} + \dots \end{aligned}$$

Wir Betrachten als Beispiel zwei Punktladungen q an \vec{R}_1 und $-q$ an \vec{R}_2 . Die

Ladungsverteilung ist also

$$\begin{aligned}
 \varrho(\vec{r}) &= q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_1) - q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_2) \\
 Q &= \int d^3r' \varrho(\vec{r}') = \int_V d^3r' (q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_1) - q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_2)) \\
 &= q \underbrace{\int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_1)}_1 - q \underbrace{\int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_2)}_1 \\
 &= 0. \\
 \vec{D} &= \int d^3r' \vec{r}' (q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_1) - q\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{R}_2)) \\
 &= q(\vec{R}_1 - \vec{R}_2) \\
 \varphi_{\text{Dipol}} &= \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{D}.
 \end{aligned}$$

1.6 Randwertprobleme

Bislang hatten wir statische Ladungsverteilungen betrachtet. In der Natur entspricht dies geladenen Nichtleitern. Es gibt jedoch auch Leiter. Ein elektrischer Leiter enthält Ladungen, die sich unter Einfluss eines elektrischen Feldes bewegen können.

In der Elektrostatik sind wir an der zeitlichen Veränderung der Felder nicht interessiert. D. h., wir warten so lange, bis die Ladungen zur Ruhe gekommen sind, also zeitlich konstant. Wenn die Ladungen sich nicht bewegen, kann es auch kein elektrisches Feld geben, weil es sonst eine Kraft auf die Ladungen ausüben würde. Darum ist auf der Leiteroberfläche $\varphi = \text{const.}$ Leiter sind also Äquipotentialflächen. Die elektrischen Feldlinien stehen somit senkrecht auf der Leiteroberfläche.

Wenn Leiteroberflächen auftreten, muss man die Poissongleichung $\Delta\varphi(\vec{r}) = 4\pi\varrho(\vec{r})$ mit der Randbedingung $\varphi = \text{const} \Leftrightarrow \nabla\varphi = 0$ lösen. Die Lösung $\varphi(\vec{r})$ ist eindeutig. Man kann dies mit dem Greenschen Satz beweisen[9].

Das Feld im Inneren eines Leiters verschwindet. Daraus folgt der Faradaykäfig: im Inneren eines leitenden Käfigs oder einer leitenden Hülle ist man vor Blitzen geschützt.

Diese Eigenschaften benutzt man zur Berechnung des elektrischen Feldes beim Vorhandensein von Leitern. Wenn man eine Leiterplatte und eine Punktladung q im Abstand d betrachtet, kann man die Methode der Spiegelladungen anwenden. Dazu denken wir uns eine weitere Ladung hinzu, deren Feld gerade so wirkt, dass das Potential am Ort der Leiterplatte verschwindet. Diese gedachte Ladung heißt Spiegelladung, weil man sie durch Achsenspiegelung an der Leiterplatte erhält. Wenn die Platte in der xy -Ebene und die Punktladung am Ort $\vec{d} = (0, 0, d)$ liegt, ist also

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}|} - \frac{q}{|\vec{r} - \vec{d}'|}.$$

Das Potential in der xy -Ebene ist dann

$$\varphi(z = 0) = \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}} = 0 = \text{const.}$$

Kapitel 2

Magnetostatik

Wir befassen uns nun mit der Magnetostatik. Der Hauptunterschied zur Elektrostatik ist, dass es keine freien magnetischen Ladungen gibt ($\operatorname{div} \vec{B} = 0$). In der Magnetostatik beschäftigen wir uns mit stationären Strömen. Man kann die Magnetostatik auch ausgehend von elementaren Dipolmomenten $\vec{\mu}$ beschreiben, die in einem Magnetfeld \vec{B} ein Drehmoment $\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{B}$ erfahren. Was ein Elementarmagnet ist und wie man ihn beschreibt, ist ein kompliziertes Problem der Festkörperphysik. Die Beschreibung über stationäre Ströme, die wir im folgenden vorstellen, ist dazu äquivalent, aber wesentlich einfacher.

Die Stromdichte \vec{j} erhalten wir wie in der Hydrodynamik durch

$$\vec{j} = \varrho \vec{v},$$

wobei ϱ die Ladungsdichte und \vec{v} die Geschwindigkeit der Ladungen ist. Den Strom durch eine Fläche erhalten wir durch

$$\oint \vec{j} d\vec{a} = I.$$

Damit ist die Einheit von Stromdichte und Strom

$$[j] = \frac{\text{esu cm}}{\text{cm}^3 \text{ s}},$$
$$[I] = \frac{\text{esu}}{\text{s}}.$$

Wie in der Hydrodynamik haben wir die Kontinuitätsgleichung

$$\oint_{\partial(V)} \vec{j} d\vec{a} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \varrho(\vec{r}') d^3 r'$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} \varrho = 0. \quad (2.1)$$

Die Magnetostatik ist dadurch definiert, dass $\partial \varrho / \partial t = 0$ ist, wir erhalten also die Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

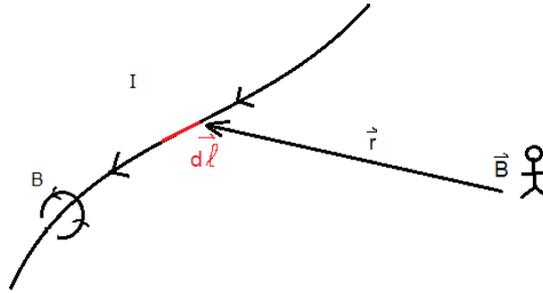


Abbildung 2.1: Zur Berechnung des magnetischen Feldes

Wir betrachten also in der Magnetostatik nur jene stationären Ströme, für die die Divergenz verschwindet. Dies entspricht der Inkompressibilität in der Hydrodynamik mit der Konsequenz $\operatorname{div} \vec{v} = 0$.

Das magnetische Feld (auch magnetische Induktion oder magnetische Flussdichte genannt) erhält man durch

$$d\vec{B} = \frac{1}{c} I \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (2.2)$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie in Abb. 2.1.

1. Dieses Gesetz ist ein $1/r^2$ -Gesetz wie in der Elektrostatik.
2. Die Richtung des Magnetfeldes bestimmt sich durch ein Kreuzprodukt.
3. Es gibt kein einzelnes $d\vec{\ell}$.
4. Der konstante Vorfaktor hängt vom Einheitensystem ab. Im hier verwendeten CGS-System ist dieser $1/c$ mit der Lichtgeschwindigkeit c .

Für eine bewegte Ladung q ist der Strom

$$I d\ell = q \frac{d\vec{\ell}}{dt} = q\vec{v}$$

$$d\vec{B} = \frac{q}{c} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Die Einheit der magnetischen Induktion ist

$$[B] = \frac{\text{esu}}{\text{s}} \frac{\text{s}}{\text{cm}} \frac{1}{\text{cm}} = \frac{\text{esu}}{\text{cm}^2} = 1 \text{ Gau\ss}$$

Das Erdmagnetfeld hat eine Stärke von etwa einem halben Gauß. In der medizinisch eingesetzten NMR verwendet man Feldstärken von 1 bis 3 Tesla. Ein Tesla ist dabei 10^4 Gauß. Die höchsten im Labor erzeugbaren Felder liegen bei etwa $100 \text{ T} = 10^6 \text{ G}$. In der Natur treten noch höhere Felder in der Astrophysik auf, etwa bei Pulsaren mit Feldern von $10^8 \text{ T} = 10^{12} \text{ G}$.

Wir rechnen nun das Magnetfeld eines unendlich langen Drahtes aus (vgl. Abb. 2.2).

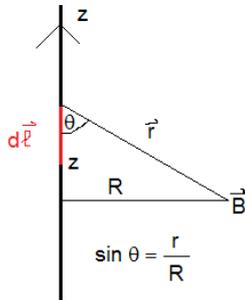


Abbildung 2.2: Berechnung des Magnetfeldes eines unendlich langen Drahtes

$$\begin{aligned}
 \vec{B} &= \frac{I}{c} \int \frac{d\vec{\ell} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\
 |\vec{B}| &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz \sin \theta}{r^2} \\
 &= \frac{I}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{R}{r^3} \\
 &= \frac{IR}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \\
 &= \frac{IR}{c} \frac{1}{R^2} (1 - (-1)) \\
 &= \frac{2I}{Rc}.
 \end{aligned}$$

Dies ist das Biot-Savartsche Gesetz. Dabei wurde das Integral

$$\int \frac{dz}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \frac{z}{(z^2 + R^2)^{1/2}}$$

verwendet. Die Richtung des Magnetfelds ergibt sich aus dem Kreuzprodukt über die Rechte-Hand-Regel.

$$\vec{B} = \frac{2I}{Rc} \hat{e}_\varphi.$$

Wenn man von einem stromdurchflossenen Leiter zur Stromdichte \vec{j} übergeht, erhält man

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \int_V \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'. \quad (2.3)$$

Hier wird die Ähnlichkeit zur Elektrostatik deutlich, wenn man mit

$$\vec{E} = \int_V \varrho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'$$

vergleicht.

Die Kraft, die auf ein von einem Strom I_1 durchflossenes Leiterstück ausgeübt wird, ist

$$d\vec{F} = \frac{I_1}{c} (d\vec{\ell}_1 \times \vec{B}).$$

Für eine Punktladung mit $I d\vec{\ell} = q\vec{v}$ erhält man die Lorentzkraft

$$\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \times \vec{B}).$$

Die Kraft, die zwei Leiterschleifen mit den Strömen I_1, I_2 aufeinander ausüben, ist also

$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= \frac{I_1}{c} \int d\vec{\ell}_1 \times \vec{B} \\ \vec{F}_{12} &= \frac{I_1 I_2}{c^2} \iint \frac{d\vec{\ell}_1 \times (d\vec{\ell}_2 \times \vec{r})}{r^3} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Dies wird als Ampèresches Gesetz bezeichnet. Es entspricht dem Coulombschen Gesetz in der Elektrostatik. Das Integral über dieses Kreuzprodukt ist sehr unhandlich. Wir verwenden daher die *bac* – *cab*-Regel und schreiben den Integranden um zu

$$\frac{1}{r^3} d\vec{\ell}_1 \times (d\vec{\ell}_2 \times \vec{r}) = \frac{d\vec{\ell}_2}{r^3} (d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{r}) - \frac{\vec{r} (d\vec{\ell}_1 \cdot d\vec{\ell}_2)}{r^3}$$

Über einen geschlossenen Weg verschwindet das Integral

$$\oint \frac{d\vec{\ell}_1 \cdot \vec{r}}{r^3} = - \oint \left(\nabla \frac{1}{r} \right) d\vec{\ell}_1 = 0.$$

Wir können das Ampèresche Gesetz in symmetrischer Form schreiben, was zeigt, dass die beiden Schleifen gleichberechtigt sind:

$$\vec{F}_{12} = - \frac{I_1 I_2}{c^2} \oint \oint \frac{\vec{r} \cdot d\vec{\ell}_1 d\vec{\ell}_2}{r^3}. \quad (2.5)$$

Man kann den Ausdruck für die magnetische Induktion vereinfachen zu

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \\ &= - \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \times \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \frac{1}{c} \int \nabla_{\vec{r}} \times \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ &= \nabla \times \frac{1}{c} \int \vec{j}(\vec{r}') \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A} \end{aligned}$$

Wir haben nun alle vier Maxwell-Gleichungen für die Elektro- und Magnetostatik.

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (2.10)$$

Diese differentielle Form der Maxwellgleichungen kann man auch in eine integrale Form überführen. Für die Elektrostatik wurden diese bereits angegeben. Die zweite Maxwellgleichung der Magnetostatik kann man umschreiben mittels des Stokes'schen Satzes

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \, d\vec{\ell} &= \int (\nabla \times \vec{B}) \, d\vec{a} = \frac{4\pi}{c} \int \vec{j} \, d\vec{a} \\ \Leftrightarrow \oint \vec{B} \, d\vec{\ell} &= \frac{4\pi}{c} I. \end{aligned}$$

Diese Formulierung wird ebenfalls manchmal als Ampèresches Gesetz bezeichnet.

2.1 Eichfreiheit

Das Vektorpotential \vec{A} ist nur über das \vec{B} -Feld beobachtbar. Eine Änderung

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\psi(\vec{r})$$

ändert wegen

$$\text{rot grad } \psi = 0 \text{ für beliebiges } \psi$$

an der magnetischen Induktion nichts. Diese Freiheit in der Wahl des Vektorpotentials bezeichnet man als Eichfreiheit. In der Elementarteilchentheorie ist dies ein fundamentales Konzept und führt zu den Eichtheorien der elektroschwachen und starken Wechselwirkung.

Kapitel 3

Die Maxwell-Gleichungen

In der Elektrostatik und der Magnetostatik wurden elektrisches Feld und Ladungen sowie magnetisches Feld und stationäre Ströme getrennt voneinander betrachtet. 1831 entdeckte Faraday, dass durch Bewegung einer Leiterschleife in einem Magnetfeld ein Strom induziert wird, wenn \vec{B} oder die vom Magnetfeld durchflossene Fläche geändert wird. Im speziellen ist dies der Fall (vgl. Abb. 3.1)

- wenn in einer benachbarten Leiterschleife der Strom an- oder abgeschaltet wird;
- wenn eine benachbarte Leiterschleife relativ zur ruhenden Leiterschleife bewegt wird;
- wenn man einen Permanentmagneten in der Nähe der Leiterschleife bewegt.

Faraday stellte fest, dass Induktionsstrom und Induktionsspannung von der zeitlichen Änderung des magnetischen Flusses abhängen. Der magnetische Fluss ist definiert analog zum Fluss in der Hydrodynamik als

$$\Phi = \int \vec{B} \hat{n} da.$$

Die induzierte Spannung ist gegeben durch das Faradaysche Induktionsgesetz.

$$U = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int \vec{B} \hat{n} da.$$

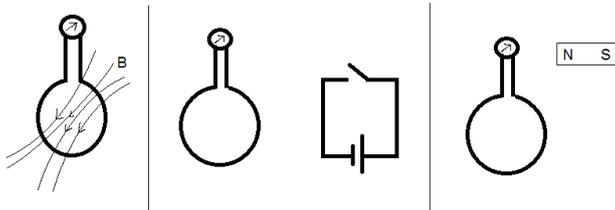


Abbildung 3.1: Induktion von Strömen in einer Leiterschleife

Die Spannung U ist dabei definiert als

$$U = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Ladung}} = \frac{\int \vec{F} d\vec{s}}{q} = \frac{q}{q} \int \vec{E} d\vec{s}.$$

Es handelt sich also um eine Potentialdifferenz pro Ladung. Das Faradaysche Induktionsgesetz kann man dann schreiben als

$$\oint_C \vec{E} d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(C)} \vec{B} \hat{n} da. \quad (3.1)$$

Die Kurve C ist dabei der Rand der Fläche O . Dadurch wird ein Zusammenhang hergestellt zwischen dem elektrischen und magnetischen Feld.

Wenn sich das Magnetfeld ändert, aber keine Leiterschleife vorhanden ist, induziert der sich ändernde magnetische Fluss ein elektrisches Feld. Die Leiterschleife ist lediglich ein Instrument zur Beobachtung dieses elektrischen Feldes. Das Faradaysche Induktionsgesetz ist ein experimentelles Ergebnis, das nicht aus den bisher bekannten Gleichung für statische Felder folgt.

Das Vorzeichen im Induktionsgesetz ist die Lenzsche Regel: Der induzierte Strom ist der Änderung des magnetischen Flusses entgegengesetzt bzw. die Induktionsspannung wirkt immer ihrer Ursache, der Änderung des magnetischen Flusses, entgegen. Wäre das Gegenteil der Fall, würde der Induktionsstrom das magnetische Feld verstärken, was der Energieerhaltung widerspricht.

Mit dem Stokeschen Satz kann man das Induktionsfeld umschreiben als

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} d\vec{s} &= \int_{\mathcal{O}(C)} (\nabla \times \vec{E}) \hat{n} da \\ &= -\frac{1}{c} n \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}(C)} \vec{B} \hat{n} da. \end{aligned}$$

Damit kann das Induktionsgesetz in differentieller Form geschrieben werden als

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}. \quad (3.2)$$

Dies ist eine Maxwellgleichung der Elektrodynamik. Die vierte Gleichung $\nabla \times \vec{B} = (4\pi/c)\vec{j}$ muss in der Elektrodynamik ebenfalls modifiziert werden. Wenn man die Divergenz dieser Gleichung bildet, erhält man

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \vec{j} = 0.$$

Die Kontinuitätsgleichung erfordert jedoch

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Um eine Änderung der Ladungsdichte zu berücksichtigen, führte Maxwell den sog. Verschiebungsstrom $1/4\pi \partial \vec{E} / \partial t$ ein. Er entspricht einer Ersetzung

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Damit wird die vierte Maxwellgleichung

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Bildung der Divergenz liefert wie gefordert

$$0 = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} 4\pi \rho = \frac{4\pi}{c} \underbrace{\left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right)}_{=0}.$$

Experimentell findet man, dass die Divergenzen von \vec{E} und \vec{B} dieselben sind wie im Fall statischer Felder.

Damit sind die vollständigen Maxwellgleichungen

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi \rho, \quad (3.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Die Maxwellgleichungen sind die Grundgleichungen der Elektrodynamik. Für vorgegebenes ρ und \vec{j} erlauben sie die Berechnung von \vec{E} und \vec{B} .

$\operatorname{div} \vec{B} = 0$ und $\operatorname{rot} \vec{E} = -(1/c) \partial \vec{B} / \partial t$ werden als homogene Gleichungen bezeichnet, weil in ihnen keine Ladungen und Ströme auftauchen. Durch Einführung der Potentiale \vec{A}, φ folgt wegen

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

direkt, dass die erste homogene Gleichung erfüllt ist

$$\operatorname{div} \vec{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0.$$

Die dritte Maxwellgleichung kann man mit dem Vektorpotential umschreiben als

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{A}) &= 0 \\ \nabla \times \left(\underbrace{\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}_{-\nabla \varphi} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Da die Divergenz des Gradienten einer skalaren Funktion immer verschwindet, führt man das elektrische Potential φ ein über

$$-\nabla \varphi = \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Damit erhält man für das elektrische Feld in Abhängigkeit von den Potentialen den Ausdruck

$$\vec{E} = -\nabla \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.8)$$

Damit ist auch die zweite homogene Gleichung erfüllt.

Diesen Ausdruck für das elektrische Feld setzen wir nun in die erste Maxwellgleichung ein.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 4\pi\rho$$

und erhalten

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \vec{A} = -4\pi\rho. \quad (3.9)$$

Die gleiche Ersetzung in der vierten Maxwellgleichung

$$\nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

liefert

$$\begin{aligned} \nabla \times \underbrace{(\nabla \times \vec{A})}_{\vec{B}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)}_{-\vec{E}} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \Leftrightarrow \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das Vektorpotential ein ähnlicher Ausdruck wie oben für das skalare elektrische Potential

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.10)$$

Die Bestimmung der Felder aus den Ladungs- und Stromverteilungen wurde damit von vier Gleichungen für die Felder auf zwei gekoppelte Gleichungen für die Potentiale geführt. Durch die Wahl einer Eichung (vgl. den letzten Abschnitt des vorigen Kapitels)

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$$

kann man diese Differentialgleichungen entkoppeln. Damit sich \vec{E} bei einer solchen Umeichung nicht ändert, muss gelten

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}.$$

Damit ist das elektrische Feld ausgedrückt durch die umgezeichneten Felder

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\nabla\varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \\ &= -\nabla \left(\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \nabla\Lambda) \\ &= -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \end{aligned}$$

d. h. durch die Umdefinition

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda \quad (3.11)$$

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (3.12)$$

ändern sich \vec{E} und \vec{B} nicht.

Wir wählen die Lorentzzeichnung

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Damit wird (3.10)

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (3.13)$$

Diese partielle Differentialgleichung ist eine »Wellengleichung mit Inhomogenität«. Die Anwendung der Lorentzzeichnung auf (3.9) liefert

$$\Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right) = -4\pi\rho$$

und somit

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \quad (3.14)$$

Dies sind die Maxwellgleichungen in der Lorentzzeichnung, ausgedrückt durch die Potentiale. Die Kopplung von elektrischem und magnetischem Feld ergibt sich dann durch die Berechnung der Felder aus den Potentialen über $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - (1/c)\partial\vec{A}/\partial t$ und $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$.

Kapitel 4

Elektromagnetische Wellen

4.1 Energieerhaltung in der Elektrodynamik

Wenn eine Ladung durch das elektrische Feld beschleunigt wird, muss die dafür nötige Energie vom elektromagnetischen Feld aufgebracht werden.

In der Elektrostatik ist die Gesamtenergie U einer diskreten Ladungsverteilung gegeben durch

$$U_E = \frac{1}{2} \sum_{i,j;i \neq j} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}.$$

Verallgemeinert auf eine beliebige Ladungsverteilung ergibt sich

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{2} \iint \frac{\varrho(\vec{r}) \varrho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' d^3 r \\ &= -\frac{1}{2} \int \varrho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) d^3 r. \end{aligned}$$

Da das Potential $\varphi(\vec{r})$ die Poisson-Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi\varrho$ erfüllt, kann man also schreiben

$$U_E = -\frac{1}{8\pi} \int \varphi(\vec{r}) \Delta\varphi(\vec{r}) d^3 r.$$

Den Integranden werten wir mit partieller Integration aus.

$$\begin{aligned} &\sum_i \underbrace{\varphi}_v \underbrace{\partial_i \partial_i \varphi}_{u'} \\ &= - \sum_i \underbrace{(\partial_i \varphi)}_{v'} \underbrace{(\partial_i \varphi)}_u + \sum_i \partial_i \underbrace{(\varphi \partial_i \varphi)}_{(vu)'}. \end{aligned}$$

Der letzte Term entspricht einer Divergenz, die mit dem Satz von Gauß in ein verschwindendes Oberflächenintegral über die Oberfläche eines unendlichen Volumens überführt werden kann

$$\int \nabla \cdot (\varphi \cdot \varphi) d^3 r = \int (\varphi \nabla \varphi) \hat{n} df = 0.$$

Damit ergibt sich durch $-\nabla\varphi = \vec{E}$ die Energiedichte des elektrischen Feldes zu

$$U_E = \frac{1}{8\pi} \int \vec{E}^2(\vec{r}) d^3r.$$

Durch analoge Überlegungen im Rahmen der Magnetostatik erhält man den Energieinhalt eines magnetischen Feldes als

$$U_B = \frac{1}{8\pi} \int \vec{B}^2(\vec{r}) d^3r.$$

Der Energieinhalt eines elektromagnetischen Feldes ist damit

$$U = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2(\vec{r}) + \vec{B}^2(\vec{r})) d^3r. \quad (4.1)$$

Nun stellt sich die Frage, welche Arbeit das Feld verrichtet. Für das elektrische Feld gilt

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q\vec{E} \\ dw &= \vec{F} d\vec{s} \\ \frac{dw}{dt} &= \vec{F} \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\vec{v}. \end{aligned}$$

Das magnetische Feld verrichtet keine Arbeit, da bei der Lorentzkraft $\vec{F} \perp \vec{v}$ ist.

Der Übergang zum Kontinuum liefert

$$\frac{dw}{dt} = \vec{E}q\vec{v} \rightarrow_{\text{Kontinuum}} j\vec{E}.$$

Damit ist die gesamte Arbeit, die das Feld verrichtet

$$\int j\vec{E} d^3r = \int \vec{E} \left(\frac{c}{4\pi} \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d^3r.$$

Als Hilfsausdrücke werden benötigt

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) &= \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B}). \end{aligned}$$

Der Ausdruck $\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ taucht auch in obigem Integral für die Gesamtarbeit auf. Man erhält

$$\begin{aligned} \int \left\{ \frac{c}{4\pi} \left[\vec{B} \cdot \underbrace{(\nabla \times \vec{E})}_{-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}} - \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) \right] - \frac{\vec{E}}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\} d^3r \\ = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d^3r - \frac{c}{4\pi} \int \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) d^3r. \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck identifizieren wir die Ableitung der Energiedichte

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \left(\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

und definieren den Poynting-Vektor

$$\vec{S} := \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}), \quad (4.2)$$

der die Dimension Energie/(Fläche · Zeit) hat. Das Integral ist damit

$$\int \vec{j} \vec{E} d^3r = \int \left(-\frac{\partial U}{\partial t} - \nabla \cdot \vec{S} \right) d^3r$$

und es ergibt sich der Energiesatz der Elektrodynamik

$$-\vec{j} \vec{E} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{S}, \quad (4.3)$$

da der obige Ausdruck für ein beliebiges Integrationsvolumen gilt. Der Poynting-Vektor beschreibt also einen Energiefluss. Der Energiesatz besagt, dass die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie in einem Volumen V + dem Energiefluss durch die Oberfläche des Volumens = der negativen Gesamtarbeit pro Zeit ist, die von den Feldern an den Ladungen im Volumen verrichtet wird.

4.2 Eigenschaften der elektromagnetischen Wellen

Im quellfreien Fall und im Vakuum sind die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned}$$

Damit sind die Maxwellgleichungen für das elektrische und magnetische Feld bis auf ein Vorzeichen symmetrischen. Wir suchen nun die Lösung dieser Gleichungen. Die Rotation der Rotation von \vec{E} ist

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Die doppelte Rotation kann umgeschrieben werden durch

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_{=4\pi \varrho=0}) - \Delta \vec{E}.$$

Damit ergibt sich für das elektrische Feld

$$\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}.$$

Analog erhält man für das Magnetfeld

$$\Delta \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Diese Ausdrücke sind Wellengleichungen, die stets die Form

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

haben. Die Wellengleichung kann man mit dem komplexen Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{B}(\vec{r}, t) &= \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}\end{aligned}$$

gelöst werden. Die physikalische Welle ist dann der Realteil dieser komplexen Welle. Wenn man diesen Ansatz in die Wellengleichung für \vec{E} einsetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned}\Delta \vec{E} &= \sum_j \partial_j \partial_j \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ &= -\vec{k}^2 \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \\ &= -\vec{k}^2 \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \vec{E} \\ \Rightarrow \frac{\omega}{c^2} &= k^2 \\ \omega &= \pm |\vec{k}| c\end{aligned}$$

Diese Beziehung zwischen der Frequenz ω und dem Wellenvektor \vec{k} bezeichnet man als Dispersionsrelation.

Der Realteil von obigem Ansatz im eindimensionalen Fall ist $u_0 \cos(kx - \omega t)$. Mit der Dispersionsrelation erhält man die zwei Lösungen

$$\begin{aligned}u_0 \cos[k(x - ct)], \\ u_0 \cos[k(x + ct)].\end{aligned}$$

Die erste Lösung beschreibt eine nach rechts laufende Welle, die zweite eine nach links laufende Welle.

Da der quellfreie Fall vorausgesetzt wurde, muss die Divergenz des \vec{E} - und \vec{B} -Feldes verschwinden.

$$\begin{aligned}0 = \operatorname{div} \vec{E} &= \sum_i \partial_i E_i = i\vec{k}\vec{E} \\ 0 = \operatorname{div} \vec{B} &= \sum_i \partial_i B_i = i\vec{k}\vec{B}\end{aligned} \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \vec{E} \perp \vec{k} \\ \vec{B} \perp \vec{k} \end{array}$$

Die Wellen stehen also senkrecht auf den Wellenvektoren, die in Ausbreitungsrichtung zeigen. Sie sind also Transversalwellen. Wir überprüfen nun die Gültigkeit

der dritten Maxwellgleichung.

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= i\vec{k} \times \vec{E} \\ -\frac{1}{c} \partial \vec{B} t &= -\frac{1}{c} (-i\omega) \vec{B} \\ \vec{k} \times \vec{E} &= \frac{\omega}{c} \vec{B} \\ \Rightarrow \vec{E} &\perp \vec{B}\end{aligned}$$

Das elektrische und das magnetische Feld stehen also aufeinander senkrecht. Da sie zudem auf dem Wellenvektor \vec{k} senkrecht stehen, bilden $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ ein Dreibein. (Den Gegensatz zu diesen transversalen Wellen bilden die longitudinalen Wellen, bei denen $\vec{k} \parallel \vec{u}$ ist.)

Da $\vec{E} \perp \vec{k}$, kann man den konstanten Vektor \vec{E}_0 durch zwei orthogonale Vektoren ausdrücken

$$\vec{E}_0 = \alpha \hat{\varepsilon}_1 + \beta \hat{\varepsilon}_2,$$

wobei α, β komplexe Zahlen sind. Die $\hat{\varepsilon}_i$ nennt man Polarisationsvektoren. Wenn wir \vec{k} in z -Richtung legen und die Koeffizienten α, β und die Polarisationsvektoren $\hat{\varepsilon}_{1,2}$ reell wählen

$$\hat{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\varepsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ist der Realteil des elektrischen Feldes

$$\text{Re } \vec{E}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos(zk - \omega t) \\ \beta \cos(zk - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Feldvektor zeigt also immer in dieselbe Richtung. Dies wird als linear polarisierte Welle bezeichnet.

Wenn bei reellem α der Koeffizient β durch $\beta = \pm i\alpha$ gegeben ist, gilt

$$\begin{aligned}\vec{E}_0 &= (\hat{\varepsilon}_1 \pm i\hat{\varepsilon}_2)\alpha \\ \text{Re } \vec{E} &= \alpha \text{Re} \left[(\hat{\varepsilon}_1 \pm i\hat{\varepsilon}_2) e^{i(kz - \omega t)} \right] \\ &= \alpha \begin{pmatrix} \cos(kz - \omega t) \\ \mp \sin(kz - \omega t) \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

In diesem Fall dreht sich der Feldvektor mit der Zeit in der xy -Ebene. Für das obere Vorzeichen dreht sich der Feldvektor mit der Zeit im Gegenzeigersinn, für das obere Vorzeichen im Uhrzeigersinn. Die Winkelgeschwindigkeit ist dabei ω . Dies bezeichnet man als zirkular polarisierte Welle. Den Drehsinn bezeichnet man auch als positive oder negative Helizität. Die Polarisationsvektoren $\hat{\varepsilon}_{1,2}$ werden bei zirkularer Polarisation oft durch

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\varepsilon}_1 + i\hat{\varepsilon}_2) \\ \hat{\varepsilon}_- &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\varepsilon}_1 - i\hat{\varepsilon}_2)\end{aligned}$$

ausgedrückt.

Wenn man linear und zirkular polarisierte Wellen überlagert, ergeben sich elliptisch polarisierte Wellen.