technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

3. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 5) (σ-Algebren)

(a) Sei $X = [0,1] \subset \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die vom Mengensystem

$$S := \{\varnothing, \{0\}, [0,1), \{1/3\}\} \subset \mathcal{P}(X)$$

erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A}(S)$ auf X.

Sei nun X eine beliebige nichtleere Menge. Zeigen Sie:

(b) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X und $\varnothing \neq B \subset X$, so ist das Mengensystem

$$\{B \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf B.

Bemerkung: Man nennt dies die *Spur* von $\mathcal{A}$ in B und schreibt dafür symbolisch auch $B \cap \mathcal{A}$.

(c) Ist X' eine weitere nichtleere Menge und $f\colon X \to X'$ eine Abbildung, so ist das Mengensystem

$$\mathcal{A}' := \{A' \subset X' \mid f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra auf X'.

Aufgabe 6) (Eigenschaften des Lebesgueschen Maßes)

Seien $A, B, A_k \subset \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, Lebesgue-messbar. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

(b) Falls $B \subset A$ und $\mu(B) < \infty$, so gilt $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$.

(c) Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so $\mu\big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

(d) Gilt $A_k \supset A_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_1) < \infty$, so $\mu\big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\big) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$.

(e) In (d) kann auf die Voraussetzung $\mu(A_1) < \infty$ im Allgemeinen nicht verzichtet werden.

bitte wenden

Aufgabe 7) (Nullmengen)

Zeigen Sie:

(a) Ist $A \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge mit einem inneren Punkt, d.h. $A^\circ \neq \varnothing$, so ist A keine Nullmenge.

(b) Die Umkehrung von (a) gilt nicht, d.h. eine Menge $A \subset \mathbb{R}^d$, die keine Nullmenge ist, muss keinen inneren Punkt besitzen.

(c) Für $Q = (a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a < b$, ist $\overline{Q} \setminus Q^\circ$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^d$, wobei $\overline{Q} = [a, b]$ und $Q^\circ = (a, b)$ den (topologischen) Abschluss bzw. das Innere von Q bezeichnen.

(d) Ist $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge, so ist $N \times \mathbb{R}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine Nullmenge in $\mathbb{R}^{d+k}$.

Aufgabe 8) (Graphen als Nullmengen)

Seien $D \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}$ stetig.

(a) Sei $\widehat{D}$ die Menge aller halboffenen Quader der Form $(a, b]$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^d$, $a < b$, deren Abschluss $[a, b]$ (vgl. Aufgabe 7c) in D enthalten ist. Zeigen Sie, dass

$$D = \bigcup_{Q \in \widehat{D}} \overline{Q} = \bigcup_{Q \in \widehat{D}} Q\,.$$

(b) Zeigen Sie mit Hilfe von (a), dass der Graph

$$G(f) := \{(x, f(x))^T \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

von f eine Nullmenge ist.

Abgabe bis Montag, den 29. Oktober 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.