Theoretische Physik I — WiSe 2018/19
0. Übungsblatt

Ausgabe: 15.10.2018 — Ute Löw
Abgabe: Bearbeitung in der ersten Übung

Aufgabe 1: Divergenz, Rotation, Gradient — 0 Punkte

Viele physikalische Systeme lassen sich durch Verwendung von Vektoren für beliebige Dimensionen beschreiben, wobei die Begriffe der Divergenz und des Gradienten zentrale Größen darstellen. In drei Dimensionen kann ferner die Rotation definiert werden. Der Nabla-Operator ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \left(\tfrac{\partial}{\partial x}, \tfrac{\partial}{\partial y}, \tfrac{\partial}{\partial z}\right)^\top .$$

Die Divergenz, Rotation und Gradient können damit geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\left(\vec{A}(x,y,z)\right) &= \vec{\nabla}\cdot\vec{A}(x,y,z)\,, \\ \mathrm{rot}\,\left(\vec{A}(x,y,z)\right) &= \vec{\nabla}\times\vec{A}(x,y,z)\,, \\ \mathrm{grad}\,\left(\Phi(x,y,z)\right) &= \vec{\nabla}\,\Phi(x,y,z)\,, \end{aligned}$$

wobei $\vec{A}(x,y,z)$ ein Vektorfeld und $\Phi(x,y,z)$ ein Skalarfeld ist.
Gegeben sei der allgemeine Ortsvektor $\vec{r}$ mit $r := |\vec{r}|$ und $r > 0$. Berechnen Sie:

a) $\vec{\nabla}\,(x^2 + xz - z^2 + 3xyz)$

b) $\vec{\nabla}\times\left(2y-4, 4z, x^2+y^2+z^2\right)^\top$

c) $\vec{\nabla}\, r$

d) $\vec{\nabla}\times\vec{r}$

e) $\vec{\nabla}\cdot\vec{r}$

f) $\vec{\nabla}\,\frac{1}{r}$

g) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{r^2}\cdot\vec{e}_r\right)$

Aufgabe 2: Kraftfelder — 0 Punkte

Damit ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ konservativ ist, muss dieses rotationsfrei sein, das heißt, die Rotation

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}(\vec{r}) \tag{1}$$

muss verschwinden. Ist dies gewährleistet, so existiert zu diesem Kraftfeld ein Skalarpotential $\Phi(\vec{r})$. Diese sind über die Vorschrift

$$-\vec{\nabla}\,\Phi(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{r}) \tag{2}$$

miteinander verknüpft. In der folgenden Aufgabe sollen Sie überprüfen, ob die jeweils gegebenen Kraftfelder konservativ sind.
Bonus: Bestimmen Sie die Potentiale zu den jeweiligen Kraftfeldern, sofern dies möglich ist.
Hinweis: Der Nabla-Operator in Kugelkoordinaten ist gegeben durch:

$$\vec{\nabla}_{r,\varphi,\vartheta} = \vec{e}_r\cdot\frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi\cdot\frac{1}{r\sin(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

a) $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ xy \end{pmatrix}$

b) $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} e^{-x}\sin(z) + y^2 z\sin(zx) \\ -2y\cos(xz) \\ -e^{-x}\cos(z) + xy^2\sin(zx) \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}_3 = \frac{a+r}{a} \cdot \exp(-r/a) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$

Aufgabe 3: Koordinatentransformationen 0 Punkte

Möchte man in den Berechnungen eines physikalischen Problems die Geometrie ausnutzen, so kann es sinnvoll sein, krummlinige Koordinaten einzuführen. Entsprechnend finden in der Physik häufig Zylinder- oder Kugelkoordinaten Anwendung.

a) Geben Sie die kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)^\top$ in Abhängigkeit des Kugelkoordinatensatzes $u \in \{r, \vartheta, \varphi\}$ und in Abhängigkeit des Zylinderkoordinatensatzes $v \in \{r, \varphi, z\}$ an. Geben Sie ebenfalls die Definitionsbereiche der neuen Koordinatensätze u und v an.

b) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante

$$\det\big[\mathbf{Dr(u)}\big] = \det\left[\left(\frac{\partial r_i}{\partial u_j}\right)_{ij}\right]$$

für die jeweiligen Koordinatensätze u und v. Dabei nummerieren die Indizes i, j die jeweiligen Koordinaten innerhalb eines Koordinatensatzes sowie die Matrixelemente durch.

c) Zur Berechnung der Masse m beziehungsweise der Ladung Q eines Körpers muss die zugehörige (Ladungs-)Dichte $\rho(\vec{r})$ über das Körpervolumen V integriert werden. Es gilt also der Zusammenhang (hier exemplarisch für die Ladung):

$$Q = \int_V \mathrm{d}^3 r \cdot \rho(\vec{r}) = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int_{z_1}^{z_2} \mathrm{d}z \cdot \rho(x, y, z).$$

Berechnen Sie die Ladung für:

- eine Einheitskugel mit der vorgegebenen Ladunsgdichte $\rho_1(x, y, z) = xy + z$
- einen Zylinder der Höhe h und dem Radius R mit der vorgegebenen Ladungsdichte $\rho_2(x, y, z) = x^2 + y^2$.