technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

2. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Alle Aufgaben auf diesem Blatt sind Präsentationsthemen für die Vorträge in der dritten Vorlesungswoche.

Vortrag 1) (Iterierte Integrale)

Es sei $T \subset \mathbb{R}^3$ der durch die Eckpunkte $(0,0,0)^T$, $(1,0,0)^T$, $(0,1,0)^T$ und $(0,0,1)^T$ gegebene Tetraeder.

(a) Schreiben Sie T in der Form $T = \{(x,y,z)^T \in Q \times \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq f(x,y)\}$ mit einem geeigneten Quader $Q \subset \mathbb{R}^2$ und einer nichtnegativen stetigen Funktion $f \in C^0(Q)$.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) und iterierten Integralen, wie sie in der Analysis II eingeführt wurden, das Volumen $\mathrm{Vol}(T)$ des Tetraeders.

Vortrag 2) (Stetigkeit)

Seien X, Y metrische Räume, $\mathcal{T}_X$ das System der offenen Mengen in X und $\mathcal{T}_Y$ das System der offenen Mengen in Y.
Beweisen Sie die folgende Äquivalenz:
Eine Funktion $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig (gemäß ε-δ-Definition), wenn $f^{-1}(M) \in \mathcal{T}_X$ für alle $M \in \mathcal{T}_Y$ gilt.

Vortrag 3) (Mengensysteme)

Sei $\Omega \neq \varnothing$ eine beliebige Menge und $\mathcal{P} := \{A \mid A \subset \Omega\}$. Für $A, B \in \mathcal{P}$ setzen wir

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)\,.$$

Sei nun $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ mit $\varnothing \in \mathcal{M}$. Wir nennen $\mathcal{M}$ einen *Ring* (über Ω), wenn $A \setminus B \in \mathcal{M}$ und $A \cup B \in \mathcal{M}$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$ gilt. Ferner heißt $\mathcal{M}$ eine *Algebra* (über Ω), wenn $\mathcal{M}$ ein Ring ist mit $\Omega \in \mathcal{M}$.
Zeigen Sie: Ist $\mathcal{M}$ ein Ring, so gilt $A \Delta B \in \mathcal{M}$ und $A \cap B \in \mathcal{M}$ für alle $A, B \in \mathcal{M}$, und $\mathcal{M}$ ist mit den Verknüpfungen $+ = \Delta$ und $\cdot = \cap$ ein kommutativer Ring im algebraischen Sinne, d.h. $(\mathcal{M}, \Delta)$ ist abelsche Gruppe, $(\mathcal{M}, \cap)$ ist assoziativ und kommutativ und es gilt das Distributivgesetz,

$$(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)\,, \quad A, B, C \in \mathcal{M}\,.$$

Ist $\mathcal{M}$ sogar eine Algebra, so hat $(\mathcal{M}, \cap)$ ein neutrales Element.

Bemerkung: Man nennt $(\mathcal{M}, \cap)$ eine kommutative *Halbgruppe*. Man beachte, dass hier nicht gefordert wird, dass ein Ring ein neutrales Element bzgl. der Multiplikation besitzt. Ringe mit einem solchen neutralem Element nennt man *Ring mit Eins* bzw. *unitärer Ring*.

bitte wenden

Vortrag 4) (Integrale von Treppenfunktionen)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wir nennen $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion*, wenn es $n \in \mathbb{N}$, Punkte $x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(x) = c_k$ für alle $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. In dem Fall setzen wir

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Sei schließlich $\mathcal{T} := \{\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist Treppenfunktion}\}$.
Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{T}$ ist mit den punktweisen Verknüpfungen ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

(b) Die Abbildung $\int_a^b\colon \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x$, ist wohldefiniert und linear.