technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

1. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis III

im Wintersemester 2018/19

Aufgabe 1) (Volumenberechnung mit Ausschöpfungen)

(a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das durch die Punkte $(0,0)^T$, $(4,0)^T$ und $(3,1)^T$ gegebene Dreieck. Wir wollen den Flächeninhalt von D durch Ausschöpfung mit Quadraten bestimmen:

Wir scheiben $Q_{a,k} := [a_1, a_1 + 2^{-k}] \times [a_2, a_2 + 2^{-k}]$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit $2^k a \in \mathbb{Z}^2$ und setzen $D_k := \{Q_{a,k} \mid Q_{a,k} \subset D\}$. Berechnen Sie nun das Volumen $\mathrm{Vol}(D)$ über den Grenzwert

$$\mathrm{Vol}(D) = \lim_{k\to\infty} \sum_{Q_{a,k} \in D_k} \mathrm{Vol}(Q_{a,k}).$$

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem tatsächlichen Flächeninhalt des Dreiecks (Formel aus der Schule).

(b) Wie bekommt man aus (a) den Flächeninhalt des von den Vektoren $u = (4,0)^T$ und $v = (3,1)^T$ aufgespannten Parallelogramms P?

(c) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis aus (b) mit der Formel

$$\mathrm{Vol}(P) = \det(u, v),$$

wobei (u, v) die aus den Spalten u und v gebildete 2×2-Matrix bezeichnet.

Aufgabe 2) (Folgen von Mengen)

Sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Teilmengen von $\mathbb{R}^n$. Wir definieren $\liminf A_k$ und $\limsup A_k$ durch

$$\liminf_{k\to\infty} A_k := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\geq k} A_j\,, \qquad \limsup_{k\to\infty} A_k := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq k} A_j\,.$$

(a) Zeigen Sie: $\liminf_{k\to\infty} A_k \subset \limsup_{k\to\infty} A_k$.

Im Falle der Gleichheit in (a) sagen wir, dass die Folge $(A_k)_k$ konvergiert und definieren ihren Grenzwert durch $\lim_{k\to\infty} A_k := \limsup_{k\to\infty} A_k$.

(b) Zeigen Sie: Gilt $A_k \subset A_{k+1}$ für alle k bzw. $A_k \supset A_{k+1}$ für alle k, so existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} A_k$ gemäß obiger Definition mit

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \bigcup\nolimits_{k\in\mathbb{N}} A_k \quad \text{bzw.} \quad \lim_{k\to\infty} A_k = \bigcap\nolimits_{k\in\mathbb{N}} A_k\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass punktweise

$$\liminf_{k\to\infty} \chi_{A_k} = \chi_{\liminf A_k} \qquad \text{und} \qquad \limsup_{k\to\infty} \chi_{A_k} = \chi_{\limsup A_k}$$

gilt. Hierbei bezeichne χ_M die sogenannte *charakteristische Funktion* der Menge M, d.h. $\chi_M(x) = 1$ für $x \in M$ und $\chi_M(x) = 0$ sonst.

(d) Wir betrachten nun speziell $A_k := (-\infty, a_k) \subset \mathbb{R}$ für eine nach oben beschränkte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen.

Zeigen Sie: $(-\infty, a) \subset \limsup_{k\to\infty} A_k \subset (-\infty, a]$ mit $a := \limsup_{k\to\infty} a_k$.

bitte wenden

Aufgabe 3) (Kardinalität von Vereinigungen)

Sei X eine nichtleere Menge. Zeigen Sie: Sind $A_1, \dots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, endliche Teilmengen von X, so gilt

$$\#\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{\substack{J \subset \{1,\dots,n\} \\ J \neq \varnothing}} (-1)^{1+\#J} \# \left(\bigcap_{j\in J} A_j\right).$$

Hierbei bezeichnet $\#A$ die Kardinalität (d.h. die Anzahl der Elemente) einer Menge A.

Tipp: Induktion.

Aufgabe 4) (Riemann-Integrale)

Finden Sie eine Folge (f_n) Riemann-integrierbarer Funktionen auf $[0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) (f_n) konvergiert punktweise gegen eine *nicht* Riemann-integrierbare Funktion.
Tipp: Aufgabe 2.

(ii) Die Folge der Integrale $\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.