Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

14. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 52) (Anfangswertprobleme) (2+2=4 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme und geben Sie jeweils das maximale Existenzintervall an:

(i) $xu'(x) = u(x) + x^3 e^{x^2}$, $u(1) = e/2$.

(ii) $u'(x) = 2xu^3(x)$, $u(0) = u_0$, $u_0 \in \mathbb{R}$.

Tipp: Fallunterscheidung nach u_0.

Aufgabe 53) (Transformation von DGLen I) (4 Punkte)

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x^3 u'(x) - u^3(x) - x^2 u(x) = 0\,, \quad u(1) = 1\,.$$

(a) Schreiben Sie das obige Anfangswertproblem in die Form $u'(x) = f(u(x)/x)$ mit einer geeigneten Funktion f, und leiten Sie für die durch $v(x) := u(x)/x$ gegebene Funktion ein Anfangswertproblem her.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Transformation aus (a) eine Lösung für das obige Anfangswertproblem und geben Sie das maximale Existenzintervall an.

Aufgabe 54) (Transformation von DGLen II; ohne Wertung) (0 Punkte)

Seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $a, b \in C(\mathbb{R})$. Sei ferner u eine *positive* Lösung (d.h. $u(x) > 0$ für alle x aus dem Existenzintervall von u) der Differentialgleichung

$$u' = au + bu^\alpha\,.$$

(a) Leiten Sie für die Funktion $v := u^{1-\alpha}$ eine lineare Differentialgleichung her.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2u'(x) + u(x) = 2(x-1)u^3(x)\,, \quad u(0) = 1$$

mit Hilfe von (a) und geben Sie das maximale Existenzintervall an. Wie erhält man hier Lösungen für negative Anfangswerte?

Aufgabe 55) (Ein System von DGLen; ohne Wertung) (0 Punkte)

Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} u(x) + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -3e^{2x} \\ e^x \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad u(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Direktes Lösen der einzelnen Komponenten und Rücksubstitution.

Abgabe bis Montag, den 16. Juli 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.