technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Prof. Dr. Ivan Veselić

Dr. Albrecht Seelmann

13. Übungsblatt zur Vorlesung

Analysis II

im Sommersemester 2018

Aufgabe 48) (Umkehrsatz) (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0\,. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(0) \neq 0$.

(b) Für alle $r > 0$ besitzt f unendlich viele lokale Extrema in $(-r, r)$.

(c) Für kein $r > 0$ ist f in $(-r, r)$ injektiv.

Wieso widerspricht dies nicht dem Umkehrsatz aus der Vorlesung?

Aufgabe 49) (Extrema unter Nebenbedingungen) (4 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y, z) := x^2 + y^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f unter den Nebenbedingungen

$$2x^2 + y^2 - 4 = 0 = x + y + z\,.$$

Aufgabe 50) (Extrema unter Nebenbedingungen II) (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, und sei $f\colon [0,1]^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := -\sum_{j=1}^{n} x_j \ln(x_j)\,, \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^T\,,$$

wobei wir $[0,1] \ni t \mapsto t\ln(t)$ als in 0 stetig fortgesetzt verstehen.
Bestimmen Sie das Maximum von f unter der Nebenbedingung $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$.

Hinweis: Man betrachte f zuerst auf $(0,1)^n$. Begründen Sie dann, warum ein Maximum auf $[0,1]^n$ unter der Nebenbedingung angenommen wird und zeigen Sie, dass die zugehörige Maximalstelle in $(0,1)^n$ liegen muss. Eine Induktion kann hierbei hilfreich sein.

Aufgabe 51) (Iterierte Integrale) (4 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^2(U)$. Folgern Sie mit Hilfe von iterierten Integralen noch einmal die folgende Aussage aus dem Satz von Schwarz:
Für alle $x \in U$ gilt $\partial_1\partial_2 f(x) = \partial_2\partial_1 f(x)$.

Abgabe bis Montag, den 9. Juli 2018, um 14 Uhr in die Übungskästen.